Zkoušková písemka LALA 24. 1. 2017 Jméno:

Praxe

1. Nechť je definováno zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ následovně:

   (a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_3 - 3x_1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$ (b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ (c) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - 2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ (d) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_3 + x_2 \\ 4x_3 + 2x_2 \end{pmatrix}$.

   Zjistěte, zda $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

   - V pozitivním případě vyšetřete obor hodnot $A(\mathbb{R}^3)$ a hodnost $h(A)$, jádro $\ker A$ a defekt $d(A)$ a najděte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - V negativním případě vysvětlete, proč A není lineární.

2. Nechť $\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{X}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ jsou vektory z $\mathbb{C}^{2,2}$.

   (a) Pokud je to možné, najděte bázi $\left[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3\right]_\lambda$, která obsahuje
   i. $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, ii. $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Pokud je to možné, doplňte $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$ na bázi $\mathbb{C}^{2,2}$.

   (c) Najděte doplněk $[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_3]_\lambda$ do $\mathbb{C}^{2,2}$, je-li to možné.

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

   Pro podprostor $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$ najděte dimenzi a bázi Q, $P + Q$ a $P \cap Q$.

   $$\text{(a)} \quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 = -x_2 \wedge x_2 = -x_3 \wedge x_3 = -x_4 \right\},$$

   $$\text{(b)} \quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \alpha_1 + x_1 = 0, \text{ kde } (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \right\},$$

   přičemž $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$.

4. Nechť je dán podprostor $P \subset\subset \mathcal{P}_4$.

   $$P = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid (\forall t \in \langle 0, 1\rangle)\,(x(t) = x(-t))\}.$$

   Najděte bázi P.

   Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_3)$ a pro každé $x \in \mathcal{P}_4$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

   $$(Ax)(t) = (Dx)(\beta t + \beta),$$

   přičemž $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_3)$ je operátor derivování. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{C}$ najděte bázi $A(P)$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte hodnost zobrazení.
   (b) Definujte hodnost matice.
   (c) Jak spolu souvisí hodnost zobrazení a hodnost matice?
   (d) Vyslovte větu o hodnosti složeného zobrazení.
   (e) Vyslovte větu o hodnosti součinu matic.

2. (a) Definujte podprostor.
   (b) Vysvětlete, proč každý podprostor obsahuje nulový vektor.
   (c) Vyslovte alternativní definice podprostoru.
   (d) Jaké všechny podprostory má vektorový prostor $\mathbb{R}^3$?

3. (a) Definujte lineárně nezávislé (LN) vektory. Zapište definici nejen slovně, ale i formálně matematicky.
   (b) Definujte lineární obal. Zapište i formálně matematicky, o jakou množinu jde.
   (c) Jsou následující tvrzení pravdivá? Pokud ano, dokažte je. Pokud ne, zkonstruujte protipříklad.
   Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V nad tělesem T.
      i. Jsou-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ LN, pak pro každé $\vec{x} \in V$ platí $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.
      ii. Jsou-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ LN, pak $\vec{x}_1$ je LN.
      iii. Platí-li $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = V$, pak $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN.