Zkoušková písemka z lineární algebry 19. 1. 2017 Jméno:

Praxe

1. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]_\lambda$, kde $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$. Nalezněte $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby $\dim P = 2$. Je-li Q podprostor $\mathbb{R}^3$, najděte bázi a dimenzi Q, $P + Q$ a $P \cap Q$ s užitím vypočtené hodnoty α. Není-li Q podprostor $\mathbb{R}^3$, vysvětlete proč ne.
   (a) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 = x_3 \right\}$,
   (b) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 = 0 \right\}$,
   (c) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 = x_3 \right\}$.

2. Nechť je definován funkcionál $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ pomocí obrazů bazických vektorů
   $$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 3,\ \varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = -3,\ \varphi(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 6.$$
   (a) Najděte hodnost $h(\varphi)$, defekt $d(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.
   (b) Najděte matici ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{E}}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^3$ a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{C}^1$.
   (c) Najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}_3{}^\#}$, kde $\mathcal{E}_3$ je standardní báze $\mathbb{C}^3$.

3. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ a ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & \alpha \\ 6 & -2 & \alpha \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,
   kde $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze $\mathbb{R}^3$.
   (a) Najděte $h(B)$ a $d(B)$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) Vyšetřete $\ker B$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (c) Najděte všechna řešení rovnice $B\vec{x} = \vec{b}$, kde $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Nechť $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4$ jsou vektory z $\mathbb{R}^{2,2}$, kde $(\mathbb{X}_1)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\mathbb{X}_2)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\mathbb{X}_3)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, (\mathbb{X}_4)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Rozhodněte, zda $\mathcal{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Vysvětlete.
   (b) Vyberte bázi z generátorů $[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4]_\lambda$.
   (c) Doplňte $\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ na bázi $[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4]_\lambda$, je-li to možné.
   (d) Nechť $(\mathbb{U})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Doplňte $\mathbb{U}, \mathbb{Z}$ na bázi $\mathbb{R}^{2,2}$, je-li to možné.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte lineární zobrazení.
   (b) Vyslovte větu, kterou nazýváme alternativní definice lineárního zobrazení.
   (c) Vyslovte větu o zadání lineárního zobrazení pomocí obrazů bazických vektorů.
   (d) Jak vypadají lineární zobrazení: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ a proč?

2. (a) Definujte sjednocení a součet podprostorů. Jsou to opět podprostory? Pokud ne, uveďte protipříklad.
   (b) Nechť V je vektorový prostor, $P, Q \subset\subset V$ a $P = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ a $Q = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda$. Jak vypadá $P + Q$?
   (c) Nechť $P = [\vec{e}_1]_\lambda$ a $Q = [\vec{e}_2]_\lambda$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ je standardní báze $\mathbb{R}^2$. Namalujte $P \cup Q$ a $P + Q$.
   (d) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. U nepravdivých uveďte protipříklad:
      i. Nechť $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad T. Potom $P \cup Q \subset P + Q$.
      ii. Nechť $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad T. Potom $\dim(P \cup Q) \leq \dim(P + Q)$.
      iii. Nechť $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad T. Potom $P + Q \subset P \cup Q$.

3. (a) Definujte bázi.
   (b) Jak vypadají standardní báze prostorů: $\mathbb{R}^1$ nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{2,2}$ nad $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}_2$ nad $\mathbb{C}$?
   (c) Vyslovte Steinitzovu větu.
   (d) Na základě Steinitzovy věty vysvětlete, proč má každá báze daného vektorového prostoru stejný počet členů.