Zkoušková písemka LALA 17. 2. 2017 Jméno:

Praxe

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ definujeme

   $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$ a dále známe ${}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Rozhodněte, v jakém pořadí lze zobrazení skládat.

   (b) Pro složené zobrazení najděte v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ jeho matici ve standardních bázích, jeho hodnost, defekt a jádro.

2. Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^{2,2}$ složená z matic $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, pro které platí:

   (a) $x_1^2 = -1$,

   (b) $x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \wedge x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0$,

   (c) $x_1 \neq 2$,

   (d) $x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0$.

   Která z těchto množin je při zachování operací v $\mathbb{C}^{2,2}$ (tj. sčítání matic a násobení matice komplexním číslem po prvcích) vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$? V pozitivním případě najděte dimenzi a bázi. V negativním případě vysvětlete, proč nejde o vektorový prostor.

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^3$, $P = \left[\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Je-li $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$, najděte dimenzi a bázi $Q, P + Q$ a $P \cap Q$. Není-li $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$, vysvětlete, proč není.

   (a) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$ (b) $Q = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{C}^3 \mid \varphi(\vec{x}) = 0 \right\}$, kde $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   přičemž $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

4. Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ jsou báze $\mathcal{P}_3$ a $x, y \in \mathcal{P}_3$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$

   $x_1(t) = 2 + 2t - t^2, x_2(t) = 2 - t + 2t^2, x_3(t) = -1 + 2t + 2t^2, (y_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   $(y_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(x)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(y)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určete $(x + 2y)_\mathcal{E}$, $(x + 2y)_\mathcal{X}$ a $(x + 2y)_\mathcal{Y}$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady! T značí všude číselné těleso.

1. (a) Definujte izomorfní zobrazení (vysvětlete 3 pojmy, těleso a vektorový prostor definovat nemusíte) a izomorfní vektorové prostory.
   (b) Vyslovte větu o jednodušším ověření izomorfnosti zobrazení.
   (c) Vyslovte větu o izomorfismu prostorů a dimenzi.
   (d) Je-li to možné, zkonstruujte izomorfismus mezi následujícími prostory. Není-li to možné, vysvětlete proč.
      i. $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$,
      ii. $\mathcal{P}_3$ a $\mathbb{R}^3$,
      iii. $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^{2,2}$.

2. (a) Definujte hodnost zobrazení.
   (b) Definujte hodnost matice.
   (c) Jak spolu souvisí hodnost zobrazení a hodnost matice?
   (d) Vyslovte větu o hodnosti složeného zobrazení.
   (e) Vyslovte větu o hodnosti součinu matic.

3. (a) Definujte lineárně závislé vektory. Zapište definici slovně i formálně matematicky.
   (b) Zapište množinově součet a průnik podmnožin vektorového prostoru.
   (c) Definujte direktní součet podmnožin vektorového prostoru.
   (d) Následující výroky nejsou pravdivé. Zkonstruujte k nim protipříklady. Dále doplňte jeden (a to minimální možný) předpoklad tak, aby se výroky pravdivými staly.
      i. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T a $A : P \to Q$. Potom $A\vec{0}_P = \vec{0}_Q$.
      ii. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in V$, kde V je vektorový prostor nad T. Potom $\vec{x}, \vec{y}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje $\alpha \in T$ tak, že $\vec{y} = \alpha\vec{x}$.
      iii. Nechť $P, Q \subset V$, kde V je vektorový prostor nad T. Potom $P + Q$ je direktní, právě když $P \cap Q = \{\vec{0}\}$.