Zkoušková písemka z lineární algebry 17. 1. 2017 Jméno:

Praxe

1. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Nechť $\mathcal{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4)$ je soubor vektorů z $\mathbb{R}^{2,2}$, kde $(\mathbb{X}_1)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbb{X}_2)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbb{X}_3)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbb{X}_4)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Dokažte, že $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$.

   (b) Najděte $(\mathbb{Z})_\mathcal{Y}$, je-li $\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

   (c) Najděte $(\mathbb{U})_\mathcal{X}$, je-li $(\mathbb{U})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   (d) Doplňte $\mathbb{U}, \mathbb{Z}$ na bázi $[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3]_\lambda$, je-li to možné.

2. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^3$, $P = \left[\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Je-li $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$, najděte dimenzi a bázi $Q, P + Q$ a $P \cap Q$. Není-li $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$, vysvětlete, proč není.

   (a) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$ (b) $Q = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{C}^3 \mid \varphi(\vec{x}) = 1 \right\}$, kde $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ a ${}^\mathcal{X}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$, přičemž pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

$$x_1(t) = 1 + t,\ x_2(t) = t - t^2,\ x_3(t) = 1 - t^2.$$

   (a) Najděte Ba (tedy obraz polynomu a při zobrazení B), je-li $(a)_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (b) Určete $h(B)$ a $d(B)$.

   (c) Vyšetřete jádro B.

   (d) Najděte všechna řešení rovnice $Bx = b$, kde

   (d1) $(b)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (d2) $b(t) = 1 + 2t + 3t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

4. Nechť $P = [x_1, x_3]_\lambda$ a $Q = [x_2]_\lambda$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$ z předchozího příkladu a $A_P \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ je projektor na P podle Q. Vyřešte následující úlohy, je-li $y(t) = 4 + t - 3t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$ a B je operátor z předchozího příkladu:

   (a) Najděte všechna řešení rovnice $(BA_P)x = y$.

   (b) Najděte všechna řešení rovnice $(A_PB)x = y$.

   (c) Najděte všechna řešení rovnice $A_Px = y$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte matici zobrazení v bázích.
   (b) Vyslovte větu o výpočtu obrazu vektoru při znalosti matice zobrazení v bázích.
   (c) Vyslovte větu o matici složeného zobrazení v bázích.
   (d) Jak lze předchozí větu využít při převádění matice zobrazení v nějakých bázích na matici stejného zobrazení v jiných bázích (metodě říkáme vnášení identity).

2. (a) Nechť P, Q jsou neprázdné podmnožiny V, kde V je vektorový prostor nad tělesem T. Definujte součet $P + Q$ a direktní součet $P \oplus Q$.
   (b) S čím je ekvivalentní direktnost součtu $P + Q$, jsou-li P, Q podprostory V?
   (c) Definujte doplněk podprostoru.
   (d) Najděte konkrétní příklad podprostoru v $\mathbb{R}^2$, který má jediný doplněk. Pokud existuje, najděte jeho doplněk. Pokud neexistuje, vysvětlete proč.
   (e) Najděte konkrétní příklad podprostoru v $\mathbb{R}^2$, který má nekonečně mnoho doplňků. Pokud existuje, popište všechny jeho doplňky. Pokud neexistuje, vysvětlete proč.

3. (a) Definujte číselné těleso.
   (b) Uveďte alespoň tři příklady číselných těles.
   (c) Uveďte alespoň tři příklady podmnožin $\mathbb{C}$, které netvoří číselné těleso.
   (d) Nechť ${\mathbb{C}^3}_{\mathbb{R}}$ je vektorový prostor, kde $V = \mathbb{C}^3$, $T = \mathbb{R}$ a kde se sčítá a násobí reálným číslem po složkách. Najděte alespoň dvě různé báze ${\mathbb{C}^3}_{\mathbb{R}}$.