Zkoušková písemka z lineární algebry 9. 1. 2017 Jméno:

Praxe

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathbb{C}^3)$ a pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, platí:

$$Ax = \begin{pmatrix} 2\alpha_0 - 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_0 - \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

   Najděte:

   (a) $h(A)$ a $d(A)$,

   (b) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ a $x_1(t) = 1 + t,\ x_2(t) = 1 - t,\ x_3(t) = 1 + t + t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$,

   (c) $\ker A$,

   (d) všechna řešení $Ax = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Nechť

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

   jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$. Nechť $M = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\lambda$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{z} = (\vec{x} + \vec{y})_{\mathcal{Y}}$.

   V závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$:

   (a) Určete dimenzi a bázi M.

   (b) Rozhodněte, zda $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$.

   (c) Rozhodněte a zdůvodněte, zda existuje projektor z $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ na M podle $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Pokud existuje, uveďte, jaké je jeho jádro a obor hodnot.

3. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$,

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda,$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \middle| x_{11} + x_{22} = x_{12} + x_{21} \right\}.$$

   (a) Najděte dimenzi a bázi $P, Q, P + Q$ a $P \cap Q$.

   (b) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ lze $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ doplnit na bázi $P \cap Q$? Pro taková α vektor na bázi doplňte.

   (c) Najděte doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$.

4. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, přičemž

$$ {}^{\mathcal{E}_4}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

(a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda je A monomorfní a zda je A epimorfní.

(b) Najděte jádro a defekt A.

(c) Najděte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, je-li *i.* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, *ii.* $(\vec{b})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Vyslovte Frobeniovu větu.
   (b) Definujte regulární a singulární matici.
   (c) Na základě Frobeniovy věty vysvětlete, proč platí či neplatí následující tvrzení:
      i. Nehomogenní soustava lineárních algebraických rovnic s čtvercovou maticí má nekonečně mnoho řešení, právě když je matice soustavy singulární.
      ii. Homogenní soustava lineárních algebraických rovnic s čtvercovou maticí má pouze triviální řešení, právě když je matice soustavy regulární.

2. (a) Definujte vektorový prostor (z axiomů stačí uvést 4: existence nulového a opačného vektoru a 2 distributivní zákony).
   (b) Představte 3 nejznámější vektorové prostory (nápověda: n-tice čísel, matice, polynomy). Uveďte, co je množina, těleso, a definujte operace.
   (c) Nechť jsou operace $\oplus$ a $\odot$ definované po složkách. Které z následujících čtveřic tvoří vektorový prostor? Pokud nejde o vektorový prostor, vysvětlete proč. Pokud jde o vektorový prostor, najděte jeho dimenzi a bázi.
      i. $(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}, \oplus, \odot)$,
      ii. $(\mathbb{C}^1, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$,
      iii. $(\mathbb{R}^1, \mathbb{C}, \oplus, \odot)$,
      iv. $(\mathbb{R}^1, \mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

3. (a) Definujte lineární zobrazení, jeho hodnost a jádro.
   (b) Definujte epimorfismus a monomorfismus. Vysvětlete i pojmy, které v definici použijete. (Těleso definovat nemusíte.)
   (c) Jak poznáte epimorfismus na základě hodnosti? Vysvětlete.
   (d) Jak poznáte monomorfismus na základě jádra? Vysvětlete.