Zkoušková písemka LALA 7. 2. 2017 Jméno:

Praxe

1. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\2\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\3 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$, nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\-1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3\\0\\0 \end{pmatrix}, (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1\\-1\\2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3,\ \vec{z} = (\vec{y})_{\mathcal{Y}}.$$

   (a) Najděte složky vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.
   (b) Je soubor $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ bází $\mathbb{R}^3$? Vysvětlete.
   (c) Najděte doplněk Q podprostoru $P = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$ do $\mathbb{R}^3$.
   (d) Nechť A_P je projektor na P podle Q. Najděte matici A_P v bázích dle vlastního výběru.

2. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1\\1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0\\1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1\\0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1\\1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^{2,2}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2,2}, \mathbb{C}^3)$, přičemž
$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Určete $d(A)$ a $h(A)$.
   (b) Najděte matici A ve standardních bázích.
   (c) Vyšetřete $\ker A$.
   (d) Najděte $A^{-1}(\vec{b})$, kde $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\0\\1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^3$.

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi P, Q, $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li
$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}, \ Q = \left[\begin{pmatrix} 0\\2\\0\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

4. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4 \in V$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1+i\\1\\i \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1-i\\0\\i \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2\\\mathrm{Re}(\alpha)\\2i \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0\\2+i\\1 \end{pmatrix}$ a $P = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$.

   (a) Najděte dimenzi a bázi P v závislosti na $\alpha \in \mathbb{C}$, je-li
   (a1) V = $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{C}$, (a2) V = $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{R}$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Vyslovte 1. větu o dimenzi a definujte pojmy v ní použité (podprostor, součet, průnik).
   (b) Vyslovte 2. větu o dimenzi. Definujte pojmy v ní použité (linearita, hodnost, defekt).
   (c) Jsou následující tvrzení pravdivá? Pokud ano, dokažte je. Pokud ne, uveďte protipříklad.
      i. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Potom A není monomorfní.
      ii. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Pokud A je epimorfní, pak je také monomorfní.
      iii. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Potom A je epimorfní.
2. (a) Definujte vektorový prostor (z axiomů stačí uvést 4: existence nulového a opačného vektoru a 2 asociativní zákony).
   (b) Jsou-li operace definovány po složkách, které z následujících množin tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$? (b1) $\mathbb{Q}^2$, (b2) $\mathbb{R}^2$, (b3) $\mathbb{C}^2$. Jde-li o vektorový prostor, najděte dimenzi a bázi. Nejde-li o vektorový prostor, vysvětlete proč.
   (c) Rozhodněte, zda existuje vektorový prostor obsahující právě dva prvky. Vysvětlete.
3. (a) Definujte dimenzi (konečnou, nekonečnou, nulovou).
   (b) Definujte bázi (definujte použité pojmy, nemusíte definovat vektorový prostor a číselné těleso).
   (c) Popište vektorové prostory, které nemají bázi.