Zkoušková písemka LALA 3. 2. 2017 Jméno:

Praxe

1. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, přičemž ${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Určete $h(B), d(B)$.
   (b) Vyšetřete jádro B.
   (c) Je B monomorfní? Vysvětlete.
   (d) Je B epimorfní? Vysvětlete.
   (e) Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$,

   $$\text{(e1) je-li } (\vec{b})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(e2) je-li } \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \text{ (e3) je-li } (\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2. Nechť je definován funkcionál $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ následujícím způsobem
   (a) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$,
   (b) $\varphi(\vec{x}) = 0$,
   (c) $\varphi(\vec{x}) = |x_1|$,
   (d) $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 + \alpha_2 - x_3$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^3$.

   Zjistěte, zda $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\#$. V pozitivním případě najděte hodnost $h(\varphi)$, defekt $d(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$ a $(\varphi)_{\mathcal{E}_3^\#}$. V negativním případě vysvětlete, proč nejde o lineární funkcionál.

3. Nechť $P \subset\subset \mathcal{P}_4, Q \subset\subset \mathcal{P}_4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P, Q, P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

   $$P = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(0) + x(1) = 0\}, \quad Q = [a, b, c]_\lambda,$$

   kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

   $$a(t) = 1 - t - t^2, \quad b(t) = 1 + t + t^3, \quad c(t) = 2 + 2t.$$

4. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou báze $\mathbb{C}^3$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^3$, kde

   $$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, (\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   $(\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určete $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}}$, $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}}$ a $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{Y}}$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte hodnost zobrazení a hodnost matice.
   (b) Jak souvisí hodnost zobrazení a hodnost jeho matice v bázích.
   (c) Najděte příklad $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ takového, že

   $$\text{(c1) } h(A) > 2, \quad \text{(c2) } h(A) = 2, \quad \text{(c3) } h(A) < 2.$$

   Pokud takové zobrazení neexistuje, vysvětlete, proč neexistuje.
   (d) Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Z následujících tvrzení vyberte ta, která jsou pravdivá. Nepravdivá vyvraťte protipříkladem. (Nestřílejte od boku: špatná odpověď = body dolů, žádná odpověď = žádné body, správná odpověď = body.)
      i. Je-li A izomorfní, potom $h(AB) = h(B)$.
      ii. Je-li A izomorfní, potom $h(A) = h(A^{-1})$.
      iii. Platí $h(A+B) \leq \min\{h(A), h(B)\}$.
      iv. Platí $h(AB) \leq \min\{h(A), h(B)\}$.
      v. Platí $h(AB) = \min\{h(A), h(B)\}$.

2. (a) Definujte lineární obal (LO) – slovně i pomocí matematické symboliky.
   (b) Uveďte vlastnosti LO (vztah LO a $\vec{0}$; pořadí generátorů; vektor, který je LK ostatních generátorů; násobení číslem; sčítání; vektorový prostor).
   (c) Jak vypadají geometricky LO v $\mathbb{R}^3$?
   (d) Uveďte příklad vektorového prostoru, který není lineárním obalem.

3. (a) Definujte součin matic.
   (b) Vyslovte větu o vlastnostech součinu matic (asociativita, distributivita, komutativita).
   (c) Definujte matici zobrazení v bázích.
   (d) Vyslovte větu o matici složeného zobrazení v bázích.
   (e) Je-li A regulární operátor, jaký vztah platí pro součin matice A v bázi $\mathcal{X}$ a matice A^{-1} v bázi $\mathcal{X}$ a proč?