Podprostor

Z teorie je nutné znát pojmy: podprostor, součet podprostorů $P + Q$, průnik podprostorů $P \cap Q$. A je důležité vědět, že $P + Q$ a $P \cap Q$ jsou vektorové prostory, a tudíž má smysl hledat jejich bázi a dimenzi. Také využijeme 1. větu o dimenzi.

1. **[cvičení]** Zjistěte, zda množina $M \subset \mathbb{C}^3$ je podprostor $\mathbb{C}^3$, a pokud je, určete bázi a dimenzi M. (Využijte faktu, že dimenze vlastního podprostoru je menší než dimenze prostoru samého.)

   (a) $M = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid (\forall j \in \{1, 2, 3\})(x_j \in \mathbb{Z})\}$,

   (b) $M = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$,

   (c) $M = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 - x_3 = 0\}$,

   (d) $M = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\}$.

2. **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}]_\lambda$ a $Q = [\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}]_\lambda$.

3. **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \wedge 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\},$$

$$Q = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \wedge 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0\}.$$

4. **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0\} \text{ a}$$

   (a) $Q = [\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$.

   (b) $Q = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda$.

5. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$, $V \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P \cap Q \cap V$, je-li $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}]_\lambda$, $Q = [\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}]_\lambda$ a $V = [\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}]_\lambda$.

6. **[cvičení]** Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$. Zjistěte, zda $M \subset\subset \mathcal{P}_4$, a v kladném případě určete $\dim M$ a najděte bázi M, je-li:

   (a) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(1) = 0\}$,

   (b) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(0) = 1\}$,

   (c) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, \text{stupeň } x \text{ je } 0 \text{ nebo } 1 \text{ nebo } 2\}$,

   (d) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, (\forall t \in \langle 0, 1\rangle)(x(t) = x(1-t))\}$,

   (e) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(1))\}$,

   (f) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(1) - 2x(-1) = 0 \wedge x(0) + x(1) = 0\}$.

7. **[cvičení]** Nechť $P = \big\{x \in \mathcal{P}_4 \,\big|\, (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(-t))\big\}$ a $Q = \big\{x \in \mathcal{P}_4 \,\big|\, (\forall t \in (1, 2))(x(t) = x(1-t))\big\}$. Je-li $P \subset\subset \mathcal{P}_4$ a $Q \subset\subset \mathcal{P}_4$, najděte bázi a dimenzi $P + Q$ a $P \cap Q$.

8. **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$. Určete dimenzi a nalezněte bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li:

   (a) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

   (b) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

   (c) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

   (d) $P = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

   (e) $P = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \,\middle|\, x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \wedge 2x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \wedge x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\right\}$,
   $Q = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \,\middle|\, 3x_1 = 2x_2 \wedge x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$.

9. **[cvičení]** Nechť $M \subset\subset \mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,
$$M = \left[\begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ i \end{pmatrix}\right]_\lambda.$$

   (a) Vyberte bázi M z generátorů M.

   (b) Doplňte na bázi M následující vektory, je-li to možné:

   (b1) $\begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}$ (b2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$.

Pro zajímavost

1. Ukažte, že matice s prvky z T rozměru $m \times n$, které mají na předepsaných místech nuly, tvoří podprostor $T^{m,n}$.

2. Rozmyslete si, že vektorový prostor T nad T má jen dva podprostory: $\{0\}$ a sám sebe T.

3. Nechť V je podmnožina $\mathbb{R}^{2,2}$ tvořená

   (a) tzv. symetrickými maticemi, tj.
$$V = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22} \in \mathbb{R},\ a_{12} = a_{21}\},$$

   (b) tzv. diagonálními maticemi, tj.
$$V = \{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22} \in \mathbb{R}\}.$$

   Zjistěte, zda $V \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$.

Výsledky: Podprostor

1. (a) M není uzavřená vůči násobení číslem z C,
   (b) M je podprostor dimenze 2,
   (c) M je podprostor dimenze 1,
   (d) M není uzavřená vůči operacím.

2. $\dim P+Q=3, \dim P\cap Q=1$, báze $P+Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right)$, báze $P\cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}\right)$.

3. $\dim P+Q=3, \dim P\cap Q=1$, báze $P+Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, báze $P\cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

4. (a) $\dim P+Q=3, \dim P\cap Q=1$, báze $P+Q$ je např. $\mathcal{E}_3$, báze $P\cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.
   (b) $\dim P+Q = \dim P\cap Q = \dim P = \dim Q = 2$, tj. $P+Q = P\cap Q = P = Q$, báze je u všech těchto prostorů např. $\left(\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

5. Platí $P\cap Q\cap V = P$, proto $\dim P\cap Q\cap V = 2$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right)$.

6. (a) $\dim M=3$, báze M je např. $(e_1-e_2, e_1-e_3, e_1-e_4)$,
   (b) M není podprostor $\mathcal{P}_4$, M není uzavřená na operace,
   (c) M není podprostor $\mathcal{P}_4$, M neobsahuje nulový vektor (nulový polynom nemá definovaný stupeň),
   (d) $\dim M=2$, báze M je např. (e_1, e_2-e_3),
   (e) $\dim M=1$, báze M je např. (e_1),
   (f) $\dim M=2$, báze M je např. $(4e_1-e_2-7e_3, e_2-e_4)$.

7. Báze P je např. (e_1,e_3), báze Q je např. (e_1, e_2-e_3), $\dim(P+Q)=3$ a báze je např. (e_1,e_2,e_3) a $\dim(P\cap Q)=1$ a báze je např. (e_1).

8. (a) $P+Q=\mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní) a $P\cap Q = \left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ (dimenze je tedy 0 a báze neexistuje),
   (b) $P+Q=\mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní) a $\dim(P\cap Q)=1$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$,
   (c) $P+Q=Q$, $\dim Q=3$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&1\\3&1\end{pmatrix}\right)$, $P\cap Q=P$, $\dim P=2$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\right)$,
   (d) $P+Q=\mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní) a $\dim(P\cap Q)=2$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right)$,
   (e) $\dim(P+Q)=3$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}3&-1\\3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&3\\-3&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&3\\0&-3\end{pmatrix}\right)$ a $P\cap Q = \left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ (dimenze je tedy 0 a báze neexistuje).

9. (a) Báze M je například $\left(\begin{pmatrix}1+2i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\2+i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1+2i\end{pmatrix}\right)$.
   (b) (b1) Báze M je například $\left(\begin{pmatrix}i\\-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+2i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\2+i\end{pmatrix}\right)$. (b2) Nelze doplnit na bázi M, protože $\begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix} \notin M$.

Pro zajímavost

1. Snadno uvážíme, že při sčítání a násobení číslem se nuly zachovávají.
2.
3. Obě vlastnosti se při sčítání a násobení číslem zachovávají.