Zkoušková písemka z lineární algebry 28. 1. 2016 Jméno:

Praxe

1. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, kde $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$:
   (a) Určete dimenzi a najděte bázi P.
   (b) Rozhodněte, zda $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in P$.
   (c) Najděte doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$.

2. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ jsou vektory v $\mathbb{R}^4$, kde $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Doplňte $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi

   (a) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, (b) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_4 = 0 \right\}$, (c) $P+Q$, (d) $P \cap Q$.

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Nechť pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí, že $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

   Najděte:

   (a) $h(A)$ a $d(A)$, (b) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}$, (c) $\ker A$, (d) vzor množiny $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

4. V $\mathcal{P}_4$ jsou dány tři báze: $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $\mathcal{Z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Nalezněte $(p + 2q)_\mathcal{Z}$, jsou-li

$$p(t) = t^2 - 1 \text{ pro každé } t \in \mathbb{C}, \quad (q)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$x_1(t) = t + 1,\ x_2(t) = t^2 - t,\ x_3(t) = t^3 - t^2,\ x_4(t) = t^3 - 1 \text{ pro každé } t \in \mathbb{C},$$

$$(y_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ (y_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ (y_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (y_4)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(z_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ z_2(t) = t^2 + 1 \text{ pro každé } t \in \mathbb{C},\ (z_3)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ (z_4)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte epimorfní zobrazení. Vysvětlete pojmy, které se v definici objeví. (Vektorový prostor definovat nemusíte.)

   (b) Která z následujících zobrazení mohou být epimorfní? Tam, kde je odpověď kladná, vymyslete příklad. Tam, kde záporná, vysvětlete proč.

   $$(a)\ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2),\ (b)\ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2),\ (c)\ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3).$$

   (c) Doplňte předpoklady tak, aby byla pravdivá následující věta:
   A je izomorfní právě tehdy, když A je epimorfní.

   (d) Je-li dán vektorový prostor V nad tělesem T, kolik existuje lineárních funkcionálů z $V^{\#}$, které nejsou epimorfní, a jak vypadají?

2. (a) Definujte lineární obal (LO).

   (b) Uveďte jeho vlastnosti (vztah LO a $\vec{0}$; vektor, který je LK ostatních generátorů; násobení; sčítání; vektorový prostor).

   (c) Jak vypadají (geometricky) LO v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$?

   (d) Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V nad číselným tělesem T. Jak vypadá nejmenší podprostor (ve smyslu inkluze) prostoru V, který obsahuje vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$? Vysvětlete.

3. (a) Definujte matici zobrazení v bázích.

   (b) Co víte o matici součtu zobrazení v bázích a o matici násobku zobrazení číslem z tělesa v bázích?

   (c) Vyslovte větu o matici složeného zobrazení v bázích.

   (d) Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{X}$ a $\mathcal{E}$ jsou báze $\mathbb{R}^3$. Jak spočteme ${}^{\mathcal{E}}A^{\mathcal{X}}$, známe-li ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}}$?