Zkoušková písemka z lineární algebry 21. 1. 2016 Jméno:

Praxe

1. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$ a $\varphi \in (\mathbb{R}^4)^{\#}$. Nalezněte dimenzi a bázi

   (a) $P + Q$ a $P \cap Q$ (b) $P + \ker \varphi$ a $P \cap \ker \varphi$,

   je-li $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$

   a pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ platí $\varphi(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

2. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, přičemž

   pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, pro něž $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, definujeme

   $A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a dále známe ${}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Rozhodněte, v jakém pořadí lze zobrazení skládat.

   (b) V případech, kdy složené zobrazení existuje, vyšetřete jeho hodnost, defekt a jádro.

3. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Nechť $\mathcal{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4)$ je

   soubor vektorů z $\mathbb{R}^{2,2}$, kde $(\mathbb{X}_1)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\mathbb{X}_2)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\mathbb{X}_3)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\mathbb{X}_4)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Dokažte, že $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$.

   (b) Najděte $(\mathbb{Z})_\mathcal{Y}$, je-li $\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   (c) Najděte $(\mathbb{U})_\mathcal{X}$, je-li $(\mathbb{U})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. Nechť $P = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(1) + x(0) = 0 \wedge x(-1) = x(0)\}$ (připomeňme, že $\mathcal{P}_4$ je prostor polynomů stupně nejvýše 3 s přidáním nulového polynomu).

   (a) Vyšetřete dimenzi a bázi P.

   (b) Najděte doplněk Q podprostoru P do $\mathcal{P}_4$,

   (c) Sestavte matici projektoru A_P na P podle Q ve standardních bázích, tj. ${}^{\mathcal{E}_4}A_P$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte matici zobrazení v bázích.
   (b) Vyslovte větu o matici součtu zobrazení v bázích a matici násobku zobrazení v bázích.
   (c) Vyslovte větu o matici složeného zobrazení v bázích.
   (d) Jak lze předchozí větu využít při převádění matice zobrazení v nějakých bázích na matici stejného zobrazení v jiných bázích (metodě říkáme vnášení identity).
2. (a) Definujte direktní součet množin.
   (b) Definujte doplněk podprostoru.
   (c) Existuje doplněk vždy? (Vyslovte příslušnou větu.)
   (d) Najděte všechny doplňky $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$ do $\mathbb{R}^2$.
3. (a) Definujte číselné těleso.
   (b) Uveďte alespoň tři příklady číselných těles.
   (c) Uveďte alespoň tři příklady podmnožin $\mathbb{C}$, které netvoří číselné těleso.