Zkoušková písemka LALA a LALB 19. 1. 2016 Jméno:

Praxe

1. Nechť $\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ jsou vektory z $\mathbb{C}^{2,2}$.

   (a) Nalezněte bázi $\left[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3\right]_\lambda$, která obsahuje
   i. $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, ii. $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Pokud je to možné, doplňte $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$ na bázi $\mathbb{C}^{2,2}$.

2. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^3$, $P = \left[\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$. Je-li $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$, najděte dimenzi a bázi $Q, P+Q$ a $P \cap Q$.

   (a) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| x_1 + x_3 = 0 \right\}$ (b) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| x_1 - x_3 = 0 \right\}$.

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ a ${}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze $\mathbb{R}^3$.
   Najděte

   (a) $h(A)$ a $d(A)$ (b) $A(\mathbb{R}^3)$ (c) $\ker A$ (d) všechna řešení $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Nechť je dán podprostor $P \subset\subset \mathcal{P}_3$.

$$P = \{x \in \mathcal{P}_3 \mid (\forall t \in \langle 0, 1 \rangle)\,(x(t) = x(-t))\}.$$

   Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_3)$ a pro každé $x \in \mathcal{P}_4$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

$$(Ax)(t) = (Dx)(\beta t + \beta),$$

   přičemž $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_3)$ je operátor derivování. Najděte bázi P a dále bázi $A^{-1}(P)$ v závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{C}$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte lineární zobrazení.
   (b) Jak vypadají všechna lineární zobrazení: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Vysvětlete.
   (c) Definujte monomorfní, epimorfní, izomorfní zobrazení. (Vysvětlete i vlastnosti zobrazení, které v definicích využijete.)
   (d) Uveďte příklad zobrazení: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (existuje-li, jinak vysvětlete, proč neexistuje),
      i. které je monomorfní a není epimorfní,
      ii. které není epimorfní a není monomorfní,
      iii. které je izomorfní.

2. (a) Definujte hodnost matice, regulární matici a singulární matici.
   (b) Vyslovte Frobeniovu větu.
   (c) Doplňte správně následující věty:
      i. Soustava lineárních algebraických rovnic se čtvercovou maticí má právě jedno řešení, právě když je matice soustavy ...
      ii. Homogenní soustava lineárních algebraických rovnic se čtvercovou maticí má více řešení, právě když je matice soustavy ...

3. (a) Definujte podprostor.
   (b) Vyslovte alternativní definice podprostoru.
   (c) Jaké všechny podprostory má vektorový prostor $\mathbb{R}^3$?