Zkoušková písemka z lineární algebry 16. 2. 2016 Jméno:

Praxe

1. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$, nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3,\ \vec{z} = (\vec{y})_{\mathcal{Y}}.$$

   (a) Najděte složky vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.
   (b) Je soubor $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ bází $\mathbb{R}^3$? Vysvětlete.
   (c) Zjistěte, zda $\vec{y} \in [17\vec{x}_2, 11\vec{x}_1, \vec{x}_3]_\lambda$?
   (d) Najděte souřadnice vektoru $\vec{z}$ v bázi $\mathcal{Y}$, tj. $(\vec{z})_{\mathcal{Y}}$.

2. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Je zadán lineární operátor A na $\mathbb{R}^3$ pomocí své matice v bázi $\mathcal{X}$ $\quad {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte

   (a) $\ker A, d(A)$ a $h(A)$ (je A regulární operátor?),
   (b) všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
   (c) $A^{-1}(P)$, tedy vzor podprostoru P, je-li $P = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$,

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \mid x_1 - \alpha x_2 + x_3 - x_4 = 0 \wedge x_1 - x_2 + \alpha x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

   (a) Najděte dimenzi a bázi P v závislosti na $\alpha \in \mathbb{C}$.
   (b) Najděte dimenzi a bázi $Q,\ P + Q$ a $P \cap Q$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{C}$, je-li

$$Q = \left[\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

   (c) Najděte doplněk Q do $\mathbb{C}^{2,2}$.

4. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{P}_4^\#$ a $x \in \mathcal{P}_4$.

$$\varphi_1(x) = x(0) - x(1) + x(2),\ \varphi_2 = e_1^\# - 2x_2^\#,\ \varphi_3(x) = 2\alpha_0 - 2\alpha_3 + \beta_1 - \beta_2 + \beta_3,$$

kde $(\forall t \in \mathbb{C})(x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3)$ a $(x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ je definována

$$(\forall t \in \mathbb{C})(x_1(t) = 1 + t,\ x_2(t) = 1 - t,\ x_3(t) = t^2 - t^3,\ x_4(t) = t^2 + t^3).$$

   (a) Pro $j \in \{1, 2, 3\}$ najděte $(\varphi_j)_{\mathcal{E}^\#}$, kde $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathcal{P}_4$.
   (b) Pokud je to možné, doplňte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ na bázi $\mathcal{P}_4^\#$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte lineární zobrazení.
   (b) Co značí symbol $\mathcal{L}(P, Q)$?
   (c) Jak jsou ve vektorovém prostoru $\mathcal{L}(P, Q)$ definovány operace?
   (d) Vyberte z následujících tvrzení pravdivá. Nepravdivá vyvraťte protipříkladem. Nechť P a Q jsou vektorové prostory nad stejným číselným tělesem.
      i. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou vektory z P a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ je báze Q. Pak existuje právě jedno $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňující $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$.
      ii. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze P a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ je báze Q. Pak existuje právě jedno $A : P \to Q$ splňující $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$.
      iii. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze P a $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ jsou vektory z Q. Pak existuje právě jedno $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňující $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$.

2. (a) Definujte lineárně závislé vektory. Zapište definici jak slovně, tak formálně pomocí matematické symboliky.
   (b) Vyslovte dvě alternativní definice lineární závislosti vektorů.
   (c) Platí následující tvrzení? Pokud ano, dokažte je. Pokud ne, najděte protipříklad. Nechť $\vec{x}, \vec{y}$ jsou vektory z vektorového prostoru V nad číselným tělesem T. Pak $\vec{x}, \vec{y}$ jsou lineárně závislé, právě když existuje $\alpha \in T$ tak, že $\vec{y} = \alpha\vec{x}$.

3. (a) Definujte podprostor.
   (b) Definujte obraz a vzor podprostoru.
   (c) Co platí pro obraz a vzor podprostoru?
   (d) Tvrzení o vzoru podprostoru dokažte.