Zkoušková písemka z lineární algebry 12. 1. 2016 Jméno:

Praxe

1. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, $P = \left[\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.
   - (a) Najděte bázi a dimenzi P v závislosti na $\alpha \in \mathbb{C}$.
   - (b) Najděte doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{C}$.
   - (c) Najděte $P + Q$ a $P \cap Q$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{C}$, pokud $Q = \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

2. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Nechť $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ je soubor z $\mathbb{R}^3$,
$$(\vec{y}_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   - (a) Je $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{R}^3$?
   - (b) Najděte $(\vec{y})_\mathcal{X}$, je-li $\vec{y} = \vec{y}_1 - 5\vec{y}_3$.
   - (c) Najděte ${}^\mathcal{X}I^\mathcal{Y}$, kde I je identický operátor (tedy hledáte matici přechodu od $\mathcal{X}$ k $\mathcal{Y}$), pokud má tato úloha smysl.
   - (d) Najděte $(\vec{z})_\mathcal{Y}$, je-li $(\vec{z})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (pokud má taková úloha smysl). Využijte k řešení výsledku bodu (c).

3. Nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\#$ definované pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ jako $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 - 2\alpha_3$, kde $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

   Báze $\mathcal{X}$ je stejná jako v příkladu 2.
   - (a) Určete $h(\varphi)$ a $d(\varphi)$.
   - (b) Najděte $\ker \varphi$.
   - (c) Najděte všechna řešení rovnice $\varphi(\vec{x}) = -1$.
   - (d) Najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$, kde $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^3$.

4. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ a ${}^\mathcal{X}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$, přičemž pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:
$$x_1(t) = 1 + t,\ x_2(t) = t + t^2,\ x_3(t) = 1 + t^2.$$

   Nechť dále $P = [x_1, x_3]_\lambda$ a $Q = [x_2]_\lambda$ a A_P je projektor na P podle Q. Určete, které z následujících úloh mají smysl, a vyřešte je:
   - (a) Najděte všechna řešení rovnice $(BA_P)x = y$, kde $y(t) = 4 + 3t + 5t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
   - (b) Najděte všechna řešení rovnice $(A_PB)x = y$, kde $y(t) = 4 + 3t + 5t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte bázi. (Vysvětlete i pojmy, které se v definici objeví, přičemž vektorový prostor definovat nemusíte.)
   (b) Je-li $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ báze $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{C}$, jak z ní vytvoříte bázi prostoru $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{R}$?
   (c) Vyslovte větu o výběru báze z generátorů a větu o doplnění LN vektorů na bázi.

2. (a) Definujte souřadnici.
   (b) Definujte souřadnicový izomorfismus.
   (c) Na jakých prostorech a v jakých bázích jsou si rovny složky a souřadnice?

3. (a) Definujte obraz množiny při lineárním zobrazení.
   (b) Co platí pro obraz podprostoru? Tvrzení dokažte.
   (c) Pro zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované jako

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1$$

   vysvětlete na základě předchozího bodu, proč není lineární.
   (d) Najděte zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, pro které
   - $\dim A(\mathbb{R}^2) > 2$,
   - $\dim A(\mathbb{R}^2) < 2$,
   - $\dim A(\mathbb{R}^2) = 2$.

   Vyslovte tvrzení, co lze při hledání zobrazení využít.