Zkoušková písemka z lineární algebry 9. 2. 2016 Jméno:

Praxe

1. Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^3$ složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pro které platí:

   (a) $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$,

   (b) $x_1 + x_2 = 0$,

   (c) $x_1 \neq x_3$.

   Která z těchto množin je při zachování operací v $\mathbb{C}^3$ (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách) vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$? V pozitivním případě najděte dimenzi a bázi. V negativním případě vysvětlete, proč nejde o vektorový prostor.

2. Nechť

   $$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

   jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ je zadané svou maticí v bázi $\mathcal{X}$

   ${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$, je-li

   (a) $(\vec{b})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, (b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, (c) $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$,

   $$P = \left[\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

   (a) Najděte dimenzi a bázi P v závislosti na $\alpha \in \mathbb{C}$.

   (b) Najděte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{C}$, je-li

   $$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \mid x_1 - x_2 = 0 \wedge x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

   (c) Najděte doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{C}$.

4. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{P}_4^\#$ a $x \in \mathcal{P}_4$.

   $\varphi_1(x) = 2x(0) + x(1) + 4x(2)$, $\varphi_2 = e_1^\# - 2x_2^\#$, $\varphi_3(x) = 2\alpha_0 + \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + 2\alpha_3 + x(-1)$,

   kde $(\forall t \in \mathbb{C})(x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3)$ a $(x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ je definována

   $$(\forall t \in \mathbb{C})(x_1(t) = 1 + t,\ x_2(t) = 1 - t,\ x_3(t) = t^2 - t^3,\ x_4(t) = t^2 + t^3).$$

   (a) Pro $j \in \{1, 2, 3\}$ najděte $(\varphi_j)_{\mathcal{X}^\#}$.

   (b) Zjistěte, zda $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ jsou lineárně nezávislé. Vysvětlete.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte vektorový prostor (z axiomů stačí uvést 4: existence nulového a opačného vektoru a 2 distributivní zákony).

   (b) Představte 3 nejznámější vektorové prostory (nápověda: n-tice čísel, matice, polynomy). Uveďte, co je množina, těleso a definujte operace.

   (c) Nechť je dána množina $V = \{\frac{1}{2}\}$. Zaveďte operace tak, aby V byl vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

2. (a) Definujte dimenzi (konečnou, nekonečnou, nulovou).

   (b) Definujte bázi (definujte použité pojmy, těleso definovat nemusíte).

   (c) Vyslovte Steinitzovu větu.

   (d) Na základě Steinitzovy věty vysvětlete, proč má každá báze daného vektorového prostoru stejný počet členů.

3. (a) Definujte lineární zobrazení, jeho hodnost a jádro.

   (b) Definujte epimorfismus a monomorfismus. Vysvětlete i pojmy, které v definici použijete. (Těleso definovat nemusíte.)

   (c) Jak poznáte epimorfismus na základě hodnosti?

   (d) Jak poznáte monomorfismus na základě jádra?