Zkoušková písemka z lineární algebry   4. 2. 2016   Jméno:

Praxe

1. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ jsou vektory v $\mathbb{R}^4$, kde $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Je-li to možné, doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

   (b) Je-li to možné, doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_4 = 0 \right\}$.

   (c) Doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi $\mathbb{R}^4$.

   (d) Najděte bázi doplňku $[\vec{x}_1, \vec{x}_2]_\lambda$ do $\mathbb{R}^4$.

2. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}, Q \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 115 \end{pmatrix} \right]_\lambda, \quad Q = \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

3. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ a ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & \alpha \\ 4 & -2 & \alpha \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$,

   kde $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze $\mathbb{R}^3$.

   (a) Najděte $h(B)$ a $d(B)$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Vyšteřete ker B v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) Najděte všechna řešení rovnice $B\vec{x} = \vec{b}$, kde $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Nechť $P = \{x \in \mathcal{P}_3 \,|\, x(0) = 0 \wedge x(1) = 0\}$. Nechť dále $y \in \mathcal{P}_4$ splňuje $y(t) = 3t^2 - 2t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

   (a) Najděte dimenzi a bázi P.

   (b) Najděte doplněk Q podprostoru P do $\mathcal{P}_3$ (prostor polynomů stupně nejvýše 2 s přidáním nulového polynomu).

   (c) Nechť A_P je projektor na P podle Q a $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4)$ je operátor integrování. Najděte všechna řešení rovnice $(SA_P)x = y$.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte složené zobrazení.
   (b) Vyslovte a dokažte větu o linearitě složeného zobrazení.
   (c) Vyslovte větu o hodnosti složeného zobrazení.

2. (a) Definujte hodnost matice.
   (b) Definujte regulární matici.
   (c) Definujte součin matic.
   (d) Vyslovte větu o hodnosti součinu matic.
   (e) Z následujících tvrzení vyberte pravdivá. Nepravdivá vyvraťte protipříkladem. Nechť jsou dány matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$, které lze násobit v pořadí $\mathbb{AB}$.
      i. Pak platí $h(\mathbb{AB}) < \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\}$.
      ii. Pak platí $h(\mathbb{AB}) = \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\}$.
      iii. Pak platí $h(\mathbb{AB}) \leq \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\}$.
      iv. Pokud $\mathbb{B}$ je regulární, pak $h(\mathbb{AB}) = h(\mathbb{A})$.
      v. Pokud $h(\mathbb{AB}) = h(\mathbb{A})$, pak $\mathbb{B}$ je regulární.

3. (a) Definujte lineární obal. Zapište jej i formálně, tj. množinovým zápisem.
   (b) Je každý lineární obal podprostor? Vysvětlete.
   (c) Je každý podprostor lineární obal? Vysvětlete.
   (d) Nechť V je vektorový prostor nad T. Čemu je roven průnik všech podprostorů V obsahujících vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ z V?