Zkoušková písemka z lineární algebry 2. 2. 2016 Jméno:

Praxe

1. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]_\lambda$, kde $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby $\dim P = 2$. Je-li Q podprostor $\mathbb{R}^3$, najděte bázi a dimenzi $P + Q$ a $P \cap Q$ s užitím vypočtené hodnoty α.
   (a) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 = x_3 \right\}$,
   (b) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 = x_3 \wedge x_1 + x_2 = x_3 \right\}$,
   (c) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 = x_3 \wedge x_1 + x_2 = x_3 \wedge x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$.

2. Nechť je definován funkcionál $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$
   $$\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2\alpha_2 - x_2 + \alpha_3,$$
   kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X}$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$, přičemž $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
   (a) Ověřte, že φ je lineární, tj. $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$.
   (b) Najděte hodnost $h(\varphi)$, defekt $d(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.
   (c) Najděte matici ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{E}}$, kde $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{C}^3$.
   (d) Najděte $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$.

3. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^2$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Dále je zadáno lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ následující maticí ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Určete hodnosti zobrazení A, B a BA.
   (b) Vyšetřete jádra zobrazení A, B a BA.
   (c) Nalezněte všechna řešení rovnice $(BA)\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Nechť V je množina kladných reálných čísel, tj. $V = (0, +\infty)$, číselné těleso $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ (tj. $\vec{x} = x > 0, \vec{y} = y > 0$) definujeme $\vec{x} \oplus \vec{y} = xy$ a $\alpha \odot \vec{x} = x^\alpha$.
   (a) Ověřte, že V je vektorový prostor nad T.
   (b) Dokažte, že vektory $\vec{x}, \vec{y}$ jsou lineárně závislé, je-li $\vec{x} = 2, \vec{y} = 3$.
   (c) Najděte bázi a dimenzi V. Vysvětlete.

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. V celé první otázce uvažujte pouze vektorové prostory konečné dimenze.
   (a) Definujte doplněk podprostoru a kodimenzi.
   (b) Jaký je vztah mezi dimenzí podprostoru, dimenzí jeho doplňku a dimenzí celého prostoru.
   (c) Najděte $P \subset\subset \mathbb{R}^2$, který má více doplňků, a najděte dva různé doplňky P do $\mathbb{R}^2$.
   (d) Najděte $P \subset\subset \mathbb{R}^2$, který má jediný doplněk, a tento doplněk P do $\mathbb{R}^2$ najděte.
2. (a) Definujte lineární zobrazení.
   (b) Uveďte alternativní definice lineárního zobrazení.
   (c) Vyslovte větu o zadání zobrazení pomocí obrazů bazických vektorů.
   (d) Co značíme symbolem $\mathcal{L}(P, Q)$? Jak na této množině definujeme operace sčítání a násobení číslem z tělesa?
3. (a) Definujte sjednocení a součet podprostorů. Jsou to opět podprostory? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, uveďte protipříklad.
   (b) Nechť V je vektorový prostor, $P, Q \subset\subset V$ a $P = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ a $Q = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda$. Jak vypadá $P + Q$?
   (c) Nechť $P = [\vec{e}_1]_\lambda$ a $Q = [\vec{e}_2]_\lambda$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ je standardní báze $\mathbb{R}^2$. Namalujte $P \cup Q$ a $P + Q$.
   (d) Doplňte správně následující větu:
   Nechť V je vektorový prostor, $P, Q \subset\subset V$. Pak $P + Q$ je nejmenší podprostor V (ve smyslu inkluze) obsahující ...