

Soustavy lineárních algebraických rovnic

V celé kapitole budeme uvažovat pouze reálná řešení. Rozmyslete si, jak by se řešení dopadlo, pokud bychom připustili komplexní čísla.

Z teorie je třeba znát pojmy: soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých, (rozšířená) matice soustavy, homogenní soustava, triviální a netriviální řešení homogenní soustavy, ekvivalentní úpravy. Dále je třeba umět rozhodnout, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najít jedno řešení.

1. [cvičení] Rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

(a)

$$\begin{aligned}x - y &= 1 \\2x - 2y &= 2 \\y - 3z &= 0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x - y &= 1 \\2x - 2y &= 3 \\y - 3z &= 0\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x - y &= 1 \\y - 3z &= 0\end{aligned}$$

2. [cvičení] Rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

(a)

$$\begin{aligned}x + 2y &= -1 \\x + y &= 2 \\-2x + y &= -1\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x - 2y &= -1 \\x + y &= 2 \\-2x + y &= -1\end{aligned}$$

3. [cvičení] Rozhodněte, zda má homogenní soustava i netriviální řešení, a pokud ano, najděte jedno takové řešení.

$$\begin{aligned}7x + 14y + 11u &= 0 \\13x + 36y - 10z + 19u &= 0 \\3x + 25y - 19z + 2u &= 0 \\3x + 4y + 2z + 5u &= 0\end{aligned}$$

4. [cvičení] Rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

$$\begin{aligned}2x + 7y + 3z + u &= 6 \\3x + 5y + 2z + 2u &= 4 \\9x + 4y + z + 7u &= 2\end{aligned}$$

5. [cvičení] Rozhodněte, zda je rovnice řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

$$2x + y - z + u - 3v = 1$$

6. [cvičení] Rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

$$\begin{array}{r} 2x + y - z + u - 3v = 1 \\ -11x + 2y - u + 3v = -1 \end{array}$$

7. Zjistěte, jakou podmínku musí splňovat parametry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, aby následující soustava lineárních rovnic měla netriviální řešení.

$$\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 0 \\ \alpha x + \beta y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array}$$

8. [cvičení] V závislosti na parametru λ rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

(a)

$$\begin{array}{r} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r} 2x - y + 3z + 4u = 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6u = 7 \\ 6x - 3y + 7z - \lambda u = 9 \\ \lambda x - 4y + 9z + 10u = 11 \end{array}$$

Výsledky: Soustavy lineárních rovnic

1. (a) řešení je tvaru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde $s \in \mathbb{R}$

(b) soustava nemá řešení

(c) řešení je tvaru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde $s \in \mathbb{R}$

2. (a) soustava nemá řešení

(b) soustava má jediné řešení $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. řešení je tvaru $s \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $s, t \in \mathbb{R}$

4. řešení je tvaru $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $s, t \in \mathbb{R}$

5. řešení je tvaru $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $s, t, p, q \in \mathbb{R}$

6. řešení je tvaru $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $s, t, p \in \mathbb{R}$

7. právě, když $\alpha - \beta = -2$, každé řešení je pak tvaru $s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde $s \in \mathbb{R}$

8. (a) řešení existuje pro $\lambda \neq -2$
(b) řešení existuje pro každé reálné λ