

Podprostor

Z teorie je nutné znát pojmy: podprostor, součet podprostorů $P + Q$, průnik podprostorů $P \cap Q$. A je důležité vědět, že $P + Q$ a $P \cap Q$ jsou vektorové prostory, a tudíž má smysl hledat jejich bázi a dimenzi. Také využijeme 1. větu o dimenzi.

1. **[cvičení]** Zjistěte, zda množina $M \subset \mathbb{C}^3$ je podprostor $\mathbb{C}^3$, a pokud je, určete bázi a dimenzi M . (Využijte faktu, že dimenze vlastního podprostoru je menší než dimenze prostoru samého.)

(a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid (\forall j \in \{1, 2, 3\})(x_j \in \mathbb{Z}) \right\},$

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\},$

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 - x_3 = 0 \right\},$

(d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \right\}.$

2. **[cvičení]** Necht' $P \subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

a $Q = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$

3. **[cvičení]** Necht' $P \subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \wedge 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \wedge 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \right\}.$$

4. **[cvičení]** Necht' $P \subset \mathbb{C}^3$, $Q \subset \mathbb{C}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \right\} \text{ a}$$

(a) $Q = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$

(b) $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$

5. Necht' $P \subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset \mathbb{R}^3$, $V \subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P \cap Q \cap V$, je-li $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda,$

$Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ a $V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$

6. **[hromadné cvičení]** Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$. Zjistěte, zda $M \subset \subset \mathcal{P}_4$, a v kladném případě určete $\dim M$ a najděte bázi M , je-li:

- (a) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(1) = 0\}$,
- (b) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(0) = 1\}$,
- (c) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid \text{stupeň } x \text{ je } 0 \text{ nebo } 1 \text{ nebo } 2\}$,
- (d) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid (\forall t \in \langle 0, 1 \rangle)(x(t) = x(1-t))\}$,
- (e) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(1))\}$,
- (f) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(1) - 2x(-1) = 0 \wedge x(0) + x(1) = 0\}$.

7. **[hromadné cvičení]** Nechť $P = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(-t))\}$ a $Q = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid (\forall t \in (1, 2))(x(t) = x(1-t))\}$. Je-li $P \subset \subset \mathcal{P}_4$ a $Q \subset \subset \mathcal{P}_4$, najděte bázi a dimenzi $P + Q$ a $P \cap Q$.

8. **[cvičení]** Nechť $P \subset \subset \mathbb{C}^{2,2}$, $Q \subset \subset \mathbb{C}^{2,2}$. Určete dimenzi a nalezněte bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li:

- (a) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,
- (b) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,
- (c) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,
- (d) $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,
- (e) $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \mid x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \wedge 2x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \wedge x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\}$,
 $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \mid 3x_1 = 2x_2 \wedge x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$.

Pro zajímavost

- Ukažte, že matice s prvky z T rozměru $m \times n$, které mají na předepsaných místech nuly, tvoří podprostor $T^{m,n}$.
- Rozmyslete si, že vektorový prostor T nad T má jen dva podprostory: $\{0\}$ a sám sebe T .
- Nechť V je podmnožina $\mathbb{R}^{2,2}$ tvořená

(a) tzv. symetrickými maticemi, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}, a_{12} = a_{21} \right\},$$

(b) tzv. diagonálními maticemi, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zjistěte, zda $V \subset \subset \mathbb{R}^{2,2}$.

Výsledky: Podprostor

- M není uzavřená vůči násobení číslem z C ,
 - M je podprostor dimenze 2,
 - M je podprostor dimenze 1,
 - M není uzavřená vůči operacím.

2. $\dim P + Q = 3$, $\dim P \cap Q = 1$, báze $P + Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

3. $\dim P + Q = 3, \dim P \cap Q = 1$, báze $P + Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
4. (a) $\dim P + Q = 3, \dim P \cap Q = 1$, báze $P + Q$ je např. $\mathcal{E}_3$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
- (b) $\dim P + Q = \dim P \cap Q = \dim P = \dim Q = 2$, tj. $P + Q = P \cap Q = P = Q$, báze je u všech těchto prostorů např. $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
5. Platí $P \cap Q \cap V = P$, proto $\dim P \cap Q \cap V = 2$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.
6. (a) $\dim M = 3$, báze M je např. $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 - e_4)$,
 (b) M není podprostor $\mathcal{P}_4$, M není uzavřená na operace,
 (c) M není podprostor $\mathcal{P}_4$, M neobsahuje nulový vektor (nulový polynom nemá definovaný stupeň),
 (d) $\dim M = 2$, báze M je např. $(e_1, e_2 - e_3)$,
 (e) $\dim M = 1$, báze M je např. (e_1) ,
 (f) $\dim M = 2$, báze M je např. $(4e_1 - e_2 - 7e_3, e_2 - e_4)$.
7. Báze P je např. $(e_1, e_3, e_2 - e_4)$, báze Q je např. $(e_1, e_2 - e_3)$, $P + Q = \mathcal{P}_4$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní) a $\dim(P \cap Q) = 1$ a báze je např. (e_1) .
8. (a) $P + Q = \mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní) a $P \cap Q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ (dimenze je tedy 0 a báze neexistuje),
 (b) $P + Q = \mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní) a $\dim(P \cap Q) = 1$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$,
 (c) $P + Q = Q$, $\dim Q = 3$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $P \cap Q = P$, $\dim P = 2$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$,
 (d) $P + Q = \mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní) a $\dim(P \cap Q) = 2$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$,
 (e) $\dim(P + Q) = 3$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ a $P \cap Q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ (dimenze je tedy 0 a báze neexistuje).

Pro zajímavost

1. Snadno uvážíme, že při sčítání a násobení číslem se nuly zachovávají.
- 2.
3. Obě vlastnosti se při sčítání a násobení číslem zachovávají.