

Lineární funkcionál

Z teorie je nutné znát pojmy: lineární funkcionál, jádro, hodnost a defekt lineárního funkcionálu. Také využijeme 2. větu o dimenzi.

1. [cvičení] Nechť je definován funkcionál $\varphi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ následujícím

způsobem

(a) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$,

(b) $\varphi(\vec{x}) = 0$,

(c) $\varphi(\vec{x}) = |x_1|$,

(d) $\varphi(\vec{x}) = \operatorname{Re}(x_1)$,

(e) $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a \mathcal{X} je báze prostoru \mathbb{C}^3 definována následovně

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

(f) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2\alpha_2 - x_2 + \alpha_3$ za stejných předpokladů jako v předchozím bodě.

Zjistěte, zda $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$. V kladném případě najděte hodnost $h(\varphi)$, defekt $d(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.

Lineární zobrazení

Z teorie je nutné znát pojmy: lineární zobrazení, jádro, hodnost a defekt lineárního zobrazení, matice zobrazení. Také využijeme 2. větu o dimenzi.

1. [cvičení] Nechť je definováno zobrazení $A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$

následujícím způsobem

(a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \operatorname{Im}(x_2 - x_3) \end{pmatrix}$,

(b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 - ix_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

(c) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Zjistěte, zda $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$. V kladném případě najděte hodnost $h(A)$, defekt $d(A)$ a bázi $\ker A$.

2. [cvičení] Zjistěte, v kterém případě je $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Pokud není, vysvětlete proč. Pokud je, najděte $h(A)$, $d(A)$, $\ker A$. Pro každé $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí:

(a) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, (b) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ iy \\ 0 \end{pmatrix}$, (c) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. [cvičení] Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

(a) Určete $h(A)$, $d(A)$.

(b) Doplňte $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ na bázi $A(\mathbb{R}^2)$.

(c) Najděte bázi $\ker A$.

(d) Je A regulární operátor? Vysvětlete.

4. [cvičení] Nechť \mathcal{X} báze prostoru \mathbb{C}^3 a \mathcal{Y} báze \mathbb{C}^2 jsou definovány následovně $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. V případech z 1. cvičení, kdy $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$, sestavte

(a) $\varepsilon_3 A \varepsilon_2$,

(b) $\varepsilon_3 A \mathcal{Y}$,

(c) $\mathcal{X} A \varepsilon_2$,

(d) $\mathcal{X} A \mathcal{Y}$.

5. [cvičení] Nechť \mathcal{X} báze prostoru \mathbb{C}^3 a \mathcal{Y} báze \mathbb{C} jsou definovány následovně $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

a $\mathcal{Y} = (-3)$. Sestavte matici ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}}$ funkcionálu φ z kapitoly Lineární funkcionál příkladu 1.(a) v bázích \mathcal{X} a \mathcal{Y} .

6. Nechť $A : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ definované následovně $(Ax)(t) = x(t+1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Ověřte, že $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze \mathcal{P}_3 , v níž pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) = t - t^2, \quad x_2(t) = 1 - t + t^2, \quad x_3(t) = -1 + t.$$

7. [cvičení] Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ zadané obrazy bazických vektorů prostoru \mathbb{C}^3 následovně

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sestavte $\varepsilon_3 A \varepsilon_2$.

8. [cvičení] Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze \mathbb{R}^3 a nechť $\varepsilon_2 A \mathcal{Y} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Sestavte } {}^{\mathcal{X}}A \varepsilon_3, \text{ kde } \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ je báze } \mathbb{R}^2.$$

9. [cvičení] Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3 . Sestavte

$${}^{\mathcal{Y}}A, \mathcal{Y} = (2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3, 3\vec{x}_1 + 4\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 2\vec{x}_3).$$

10. [cvičení] Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$,
 ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Nalezněte $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

11. [cvičení] Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze \mathbb{R}^2 , $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Nechť ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a nechť pro každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ platí $B\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Nalezněte ${}^{\mathcal{X}}(A + 2B)^{\mathcal{X}}$.

12. [cvičení] Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Úkoly:

(a) Najděte bázi $A(\mathbb{C}^4)$ a určete hodnotu $h(A)$ a defekt $d(A)$.

(b) Najděte bázi jádra.

(c) Nalezněte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. [cvičení] Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^4)$. Zobrazení A je definováno obrazy bazických vektorů $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ a ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, báze \mathcal{Y} a \mathcal{Z} jsou

tvaru

$$\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{Z} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

Nalezněte ${}^{\mathcal{E}_2}(BA)^{\mathcal{Z}}$.

14. [cvičení] Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. Nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^{\#}$, ${}^{\mathcal{E}_2}\varphi^{\mathcal{Z}} = (1, 1)$, kde $\mathcal{Z} = (3)$. Najděte bázi jádra φA .

15. [cvičení] Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, ${}^{\mathcal{E}_3}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$, kde $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete hodnotu zobrazení BA .

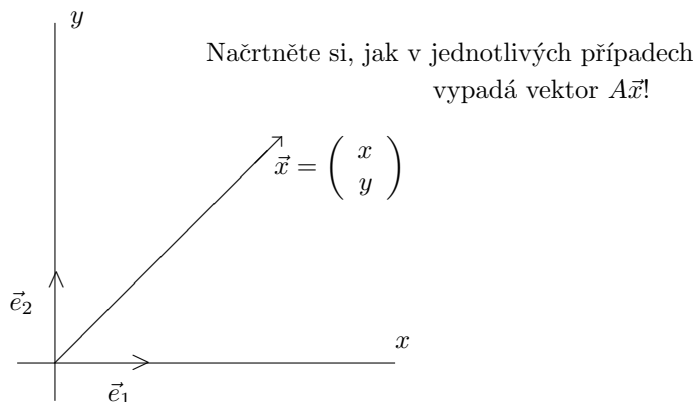
Pro zajímavost

1. Proč žádné zobrazení $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ není lineární?
2. Nechť $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je definované pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ jako $A\vec{x} = (\vec{x})_{\mathcal{X}}$, kde $\mathcal{X} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1)$. Najděte $A(\{(\frac{1}{1}), (\frac{2}{2})\})$, $A([\frac{1}{1}]_{\lambda})$, $A^{-1}(\{(\frac{1}{1}), (\frac{2}{2})\})$, $A^{-1}([\frac{1}{1}]_{\lambda})$. Je A epimorfni, monomorfni?
3. Nechť $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je definované pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ jako

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^{\#}(\vec{x}) \\ \vec{x}_2^{\#}(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{X} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1)$. Najděte $A(\{(\frac{1}{1}), (\frac{2}{2})\})$, $A([\frac{1}{1}]_{\lambda})$, $A^{-1}(\{(\frac{1}{1}), (\frac{2}{2})\})$, $A^{-1}([\frac{1}{1}]_{\lambda})$. Je A epimorfni, monomorfni?

4. [cvičení] Nechť \mathbb{A} je reálná matice typu 2×2 . Definujeme zobrazení $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem $A\vec{x} := \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Ověřte, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Zkontrolujte, že operátory A určené následujícími maticemi \mathbb{A} působí tak, jak je uvedeno v závorkách.



- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (A je **zrcadlení** nebo **osová souměrnost** podle osy x .)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (A je **zrcadlení** nebo **osová souměrnost** podle osy $x = y$.)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (A je **středová souměrnost**.)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (A je **rotace** o úhel θ po směru hodinových ručiček, matici se říká *elementární matice rotací*.)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (A je **prodloužení** respektive **zkrácení** ve směru x .)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (A je **zkosení** ve směru x .)

5. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem. Nechť $A : P \rightarrow Q$ je izomorfismus. Ověřte a zapamatujte si:

- (a) $\dim P = \dim Q$
- (b) Je-li $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ LN soubor, pak $(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n)$ je LN. (Na toto tvrzení stačí A monomorfní.)
- (c) Je-li $P_1 \subset\subset P$ a $\dim P_1 = k$, pak $A(P_1) \subset\subset Q$ (na to stačí linearita A) a $\dim A(P_1) = k$.
- (d) Je-li $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ báze P , pak $(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n)$ je báze Q .
- (e) Analogická tvrzení platí i pro A^{-1} .
6. Jak je možné, že funkcionál $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovaný pro každý vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ jako

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

není prostý, ačkoliv $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$?

7. Ukažte, že následující zobrazení \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^2 nejsou lineární. Pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definujeme
- (a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- (b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix}$,
- (c) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,
- (d) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 - \sqrt{|x_2|} \\ x_3 \end{pmatrix}$,
- (e) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,
- (f) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ e^{x_3} \end{pmatrix}$.

Výsledky: Lineární funkcionál

1. (a) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$, $h(\varphi) = 1$, $d(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
- (b) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$, $h(\varphi) = 0$, $d(\varphi) = 3$, báze jádra je např. \mathcal{E}_3
- (c) $\varphi \notin (\mathbb{C}^3)^\#$
- (d) $\varphi \notin (\mathbb{C}^3)^\#$
- (e) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$, $h(\varphi) = 1$, $d(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- (f) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$, $h(\varphi) = 1$, $d(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Výsledky: Lineární zobrazení

1. (a) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$
- (b) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$, $h(A) = 2$, $d(A) = 1$, báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} -2 - i \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
- (c) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$
2. (a) A je lineární, $h(A) = 2$, $d(A) = 0$, $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

- (b) A není vůbec zobrazení do \mathbb{R}^3 , tudíž ani lineární zobrazení do \mathbb{R}^3
- (c) A není lineární, například proto, že obraz nulového vektoru není nulový vektor
3. (a) $h(A) = 2, d(A) = 0$
- (b) báze $A(\mathbb{R}^2) = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- (c) báze jádra neexistuje, protože jádro je nulový prostor
- (d) A není regulární operátor, protože definiční obor a obor hodnot nejsou stejné vektorové prostory
4. (a) $\varepsilon_3 A \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (b) $\varepsilon_3 A \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} i & -i & -1+i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (c) $\mathcal{X} A \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -i & -2-i & -2-i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- (d) $\mathcal{X} A \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} -1+2i & -1+3i & -1+2i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. $\mathcal{X} \varphi \mathcal{Y} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
6. $\mathcal{X} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
7. $\varepsilon_3 A \varepsilon_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
8. $\mathcal{X} A \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 23 & 1 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$
9. $\mathcal{Y} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
10. $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}$
11. $\varepsilon_2(A + 2B)\mathcal{X} = \begin{pmatrix} -81 & -27 \\ -56 & -19 \end{pmatrix}$
12. (a) báze $A(\mathbb{C}^4)$ je např. $\mathcal{E}_2, h(A) = 2, d(A) = 2$
- (b) báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$
- (c) $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$

13. $\mathcal{E}_2(BA)^Z = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

14. báze jádra φA je např. $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

15. pro $\alpha \neq -3$ je $h(BA) = 3$, pro $\alpha = -3$ je $h(BA) = 2$