

1. Nechť je definován funkcionál $\varphi : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{C}$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(x) = x(1) - \alpha_1.$$

- (a) Ověřte, že φ je lineární, tj. $\varphi \in (\mathcal{P}_3)^\#$.
- (b) Najděte hodnotu $h(\varphi)$, defekt $d(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.
- (c) Najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$, kde $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathcal{P}_3$.
2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Nechť $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ a $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- (a) Určete $h(A)$ a $d(A)$.
- (b) Najděte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$, tj. matici zobrazení A ve standardních bázích.
- (c) Najděte $\ker A$.
- (d) Vysvětlete, zda A je monomorfní nebo epimorfní zobrazení.
3. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ a ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{E}_3$ je standardní báze $\mathbb{R}^3$.
- (a) Najděte $h(B)$ a $d(B)$.
- (b) Najděte všechna řešení rovnice $B\vec{x} = \vec{b}$, kde $(\vec{b})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.
4. Nechť $P = [e_1 + e_2, e_2 + e_4, e_4 - e_1]_\lambda$, kde (e_1, e_2, e_3, e_4) je standardní báze $\mathcal{P}_4$ (prostor polynomů stupně nejvýše 3 s přidáním nulového polynomu). Nechť dále $y \in \mathcal{P}_3$ splňuje $y(t) = 1 + 3t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
- (a) Najděte doplněk Q podprostoru P do $\mathcal{P}_4$.
- (b) Nechť A_P je projektor na P podle Q a $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_3)$ je operátor derivování. Najděte všechna řešení rovnice $(DA_P)(x) = y$.