Kontrolní písemka LAL 21. 12. 2015 Jméno:

1. Nechť je definován funkcionál $\varphi : \mathbb{C}^{2,2} \to \mathbb{C}$ pro každé $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$

$$\varphi(\mathbb{X}) = x_{11} + 2x_{21} - 3x_{22}.$$

   (a) Ověřte, že φ je lineární, tj. $\varphi \in (\mathbb{C}^{2,2})^{\#}$.

   (b) Najděte hodnost $h(\varphi)$, defekt $d(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.

   (c) Najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^{\#}}$, kde $\mathcal{E}$ je standardní báze prostoru $\mathbb{C}^{2,2}$.

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Nechť $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Určete $h(A)$ a $d(A)$.

   (b) Najděte ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}$, tj. matici zobrazení A ve standardních bázích.

   (c) Najděte $\ker A$.

   (d) Vysvětlete, zda A je monomorfní nebo epimorfní zobrazení.

3. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ a ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,
   kde $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze $\mathbb{R}^3$.

   (a) Najděte $h(B)$ a $d(B)$.

   (b) Najděte všechna řešení rovnice $B\vec{x} = \vec{b}$, kde $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Nechť $P = [e_1 + e_2, e_1 - e_3, e_2 + e_3]_\lambda$, kde (e_1, e_2, e_3) je standardní báze $\mathcal{P}_3$ (prostor polynomů stupně nejvýše 2 s přidáním nulového polynomu). Nechť dále $y \in \mathcal{P}_4$ splňuje $y(t) = -t + t^2 + t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

   (a) Najděte doplněk Q podprostoru P do $\mathcal{P}_3$.

   (b) Nechť A_P je projektor na P podle Q a $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4)$ je operátor integrování. Najděte všechna řešení rovnice $(SA_P)x = y$.