Kontrolní písemka LAL 21. 12. 2015 Jméno:

1. Nechť je definován funkcionál $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$

$$\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2\alpha_2 - x_2 + \alpha_3,$$

kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X}$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$, přičemž $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

   (a) Ověřte, že φ je lineární, tj. $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$.

   (b) Najděte hodnost $h(\varphi)$, defekt $d(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.

   (c) Najděte $(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}}$.

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Nechť pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí, že $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Určete $h(A)$ a $d(A)$.

   (b) Najděte ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}$, tj. matici zobrazení A ve standardních bázích.

   (c) Najděte $\ker A$.

   (d) Vysvětlete, zda A je monomorfní nebo epimorfní zobrazení.

3. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ a ${}^{\mathcal{Y}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$.

   (a) Najděte $h(B)$ a $d(B)$.

   (b) Najděte všechna řešení rovnice $B\vec{x} = \vec{b}$, kde $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Nechť $P = [e_4, e_1 - e_3, e_2 + e_3]_\lambda$, kde (e_1, e_2, e_3, e_4) je standardní báze $\mathcal{P}_4$ (prostor polynomů stupně nejvýše 3 s přidáním nulového polynomu). Nechť dále $y \in \mathcal{P}_4$ splňuje $y(t) = t + t^2 + t^3$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

   (a) Najděte doplněk Q podprostoru P do $\mathcal{P}_4$,

   (b) Nechť A_P je projektor na P podle Q a $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4)$ je operátor integrování. Najděte všechna řešení rovnice $(A_P S)x = y$.