

4. cvičení LAP

Podprostor

- Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$. Zjistěte, zda $M \subset\subset \mathcal{P}_4$, a v kladném případě určete $\dim M$ a najděte bázi M , je-li:
 - $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(1) = 0\}$,
 - $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(0) = 1\}$,
 - $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid \text{stupeň } x \text{ je nejvýše } 2\}$,
 - $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid (\forall t \in (0, 1))(x(t) = x(1-t))\}$,
 - $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(1))\}$,
 - $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(1) - 2x(-1) = 0 \wedge x(0) + x(1) = 0\}$.
- Nechť $P = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(-t))\}$ a $Q = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid (\forall t \in (1, 2))(x(t) = x(1-t))\}$. Je-li $P \subset\subset \mathcal{P}_4$ a $Q \subset\subset \mathcal{P}_4$, najděte bázi a dimenzi $P + Q$ a $P \cap Q$.

- Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$. Určete dimenzi a nalezněte bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li:

$$(a) P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}, Q = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \right]_{\lambda},$$

$$(b) P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}, Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda},$$

$$(c) P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}, Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda},$$

$$(d) P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}, Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]_{\lambda},$$

$$(e) P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \mid x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \wedge 2x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \wedge x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\}, Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \mid 3x_1 = 2x_2 \wedge x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

- Nechť $M = \left\{ A \in T^{n,n} \mid \left(\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in T^n \right) \left(\exists \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in T^n \right) (\forall i \in \hat{n})(\forall j \in \hat{n})(A_{ij} = x_i + y_j) \right\}$. Dokažte, že $M \subset\subset T^{n,n}$ a určete $\dim M$.

Lineární variety

Jsou-li lineární variety zadány v prostorech \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , dělejte náčrty situací!

- Nechť $W \subset \mathbb{R}^2$, kde

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

Napište směrovou rovnici W , parametrické rovnice W a zapište W ve tvaru afinního obalu.

- Nechť $W \subset \mathbb{R}^2$, kde

$$W = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}.$$

Napište parametrické rovnice W .

3. Necht' $W \subset \mathbb{R}^2$, kde

$$W \equiv y = 2.$$

Napište parametrické rovnice W .

4. Necht' $W \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W \equiv \begin{cases} x - y - 2z = 1, \\ 2x + 3y - z = -2. \end{cases}$$

Najděte parametrické rovnice W .

5. Necht' $W \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}.$$

Napište parametrické rovnice W .

6. Necht' $W \subset \mathbb{R}^4$, kde

$$W \equiv 2x - 3y = -4.$$

Najděte parametrické rovnice W .

7. Zjistěte, zda následující body z \mathbb{R}^4 leží v jedné přímce nebo v jedné rovině.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Návod: Uvědomte si, že nejmenší lineární varieta, která body obsahuje, je jejich afinní obal.

8. Rozmyslete si, jaké všechny případy mohou nastat pro průnik dvou lineárních variet v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 .

Ve všech příkladech zní zadání stejně: Určete vzájemnou polohu a najděte průnik lineárních variet W_1 a W_2 .

(a) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde

$$W_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad W_2 \equiv -2x + y = 3.$$

(b) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde

$$W_1 \equiv x + y = 1, \quad W_2 \equiv x - y = 3.$$

(c) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 2t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}.$$

(d) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y = 2, \end{cases} \quad W_2 \equiv \begin{cases} 2x + z = 3, \\ 2y + z = 1. \end{cases}$$

(e) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}, \quad W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}.$$

(f) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} 2x + 3y - z & = & -2, \\ 2x - y & = & 2. \end{array}$$

(g) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \quad W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}.$$

(h) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

(i) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 3t + s, \\ y & = & 1 + t - s, \\ z & = & 1 + t + s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(j) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 3t + s, \\ y & = & t - s, \\ z & = & t + s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(k) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \quad W_2 \equiv 2x - y = 2.$$

(l) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv 2x + 3y + 4z = 2, \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1 + t, \\ y & = & 4 - 2t - 4s, \\ z & = & -3 + t + 3s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(m) Necht' $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, kde

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcl} -x + 5y + z - 4u & = & 1, \\ x + y + z - 2u & = & 2, \end{array} \quad W_2 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}.$$

(n) Necht' W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v \mathbb{R}^4 zadané následovně:

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}, \quad W_2 \equiv \begin{matrix} x = 1 + t - s \\ y = 1 + t - s \\ z = 1 + t - s \\ u = 1 + t - s \end{matrix},$$

$$W_3 \equiv \begin{matrix} x - y & = & 1 \\ x & - & z & = & 2 \end{matrix}$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_3$.

(o) Necht' W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v \mathbb{R}^4 zadané následovně:

$$W_1 \text{ je nejmenší lineární varieta obsahující vektory } \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, W_2 \equiv \begin{matrix} x = 1 + t - 2s \\ y = 1 + t - s \\ z = 1 + t - s \\ u = 1 + t - s \end{matrix},$$

$$W_3 \equiv \begin{matrix} x - y & = & 0 \\ x & - & z & = & 0 \end{matrix}$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

(p) Necht' jsou dány lineární variety W_1, W_2 v prostoru \mathbb{R}^4 :

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}, \quad W_2 \equiv \begin{matrix} x = 1 + t + s + r \\ y = 0 - t \\ z = 0 + t + s \\ u = 0 - t + s + r \end{matrix}.$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte jejich vzájemnou polohu a průnik.

(q) Necht' W_1, W_2 jsou lineární variety v \mathbb{R}^4 . Necht' W_1 je nejmenší lineární varieta, která obsahuje

$$\text{vektory } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ a necht' } W_2 \equiv \begin{matrix} -2y + z - u = 1 \\ x + y = 0 \\ x - y + z - u = 1 \end{matrix}.$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu a průnik W_1 a W_2 .

(r) Necht' jsou dány lineární variety W_1, W_2 v prostoru \mathbb{R}^4 :

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}, \quad W_2 \equiv \begin{matrix} x = 2 + t + s \\ y = -t \\ z = t \\ u = s \end{matrix}.$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte jejich vzájemnou polohu a průnik.

(s) Necht' W_1, W_2 jsou lineární variety v prostoru \mathbb{R}^4 zadané následovně:

$$W_1 \text{ je nejmenší lineární varieta obsahující vektory } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, W_2 \equiv \begin{matrix} x = 1 + t - 2s \\ y = 1 + t - s \\ z = 1 + t - s \\ u = 1 + t - s \end{matrix}.$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2$.