3. cvičení LAP

Vektorový prostor, LN a LZ, báze, dimenze

1. Uvažujme vektorový prostor reálných funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbb{R}$ s operacemi definovanými bodově, tj. nechť $f, g \in V$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme

   $(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t)$, $(\alpha \odot f)(t) = \alpha f(t)$ pro každé $t \in M$. Nechť množina M je rovna

   a) intervalu $(0, \pi)$,

   b) $\{k\pi | k \in \mathbb{N}\}$.

   Ověřte, že f, g jsou LN v případě a) a LZ v případě b), je-li $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$.

2. Nalezněte v prostoru $\mathbb{R}^4$ dvě báze tak, aby neměly žádný společný vektor, přičemž jedna báze bude obsahovat vektory $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ a druhá báze vektory $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

3. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ jsou vektory z prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$. Určete $\dim[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$, je-li:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}3+2i\\2-3i\end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}2-i\\3+i\end{pmatrix},\ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix}3+4i\\-1-5i\end{pmatrix},\ \vec{x}_4 = \begin{pmatrix}1-2i\\1+3i\end{pmatrix}.$$

4. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix}i & 1\\-1 & -i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & i\\i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-i & 0\end{pmatrix}\right)$,

   $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 0\\5 & -3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & -1\\3 & -1\end{pmatrix}\right)$ jsou báze prostoru $\mathbb{C}^{2,2}$. Nalezněte $(\mathbb{X})_\mathcal{Y}$, je-li:

   a) $(\mathbb{X})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix}1\\i\\i\\1\end{pmatrix}$, b) $(\mathbb{X})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

5. Nechť $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ je báze V nad T. Známe-li $(\vec{x})_\mathcal{X}$ a $(\vec{y}_1)_\mathcal{X}, \ldots, (\vec{y}_n)_\mathcal{X}$, pak $(\vec{x})_\mathcal{Y}$ najdeme jako řešení soustavy

$$\left((\vec{y}_1)_\mathcal{X}\ \ldots\ (\vec{y}_n)_\mathcal{X} \mid (\vec{x})_\mathcal{X}\right).$$

   Využijte toho v následujícím příkladu.
   Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ jsou báze $\mathcal{P}_3$ a $x, y \in \mathcal{P}_3$.

$$\forall t \in \mathbb{C}$$
$$x_1(t) = 2 + 2t - t^2$$
$$x_2(t) = 2 - t + 2t^2$$
$$x_3(t) = -1 + 2t + 2t^2.$$

   Dále $(y_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$, $(y_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $(y_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ a $(x)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ a $(y)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Najděte $(x-2y)_\mathcal{Y}$, $(x-2y)_\mathcal{X}$ a $(x-2y)_\mathcal{E}$.

Podprostor

1. Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$. Zjistěte, zda $M \subset\subset \mathcal{P}_4$, a v kladném případě určete $\dim M$ a najděte bázi M, je-li:

   a) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(1) = 0\}$,

   b) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(0) = 1\}$,

   c) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\,$ stupeň x je nejvýše $2\}$,

   d) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, (\forall t \in \langle 0, 1\rangle)(x(t) = x(1-t))\}$,

   e) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(1))\}$,

   f) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(1) - 2x(-1) = 0 \wedge x(0) + x(1) = 0\}$.

2. Nechť $M = \left\{ \mathbb{A} \in T^{n,n} \,\middle|\, \left(\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in T^n \right) \left(\exists \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in T^n \right) (\forall i \in \widehat{n})(\forall j \in \widehat{n})(\mathbb{A}_{ij} = x_i + y_j) \right\}$.
   Dokažte, že $M \subset\subset T^{n,n}$ a určete $\dim M$.