2. cvičení LAP

Vektorový prostor, LN a LZ, báze, dimenze

1. Jsou vektory $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4$ z $\mathbb{C}^{2,2}$ LN nebo LZ?
$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Jsou vektory x_1, x_2, x_3, x_4 z $\mathcal{P}$ LN nebo LZ?
$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{C} \\ &\qquad x_1(t) = 3t - 1 \\ &\qquad x_2(t) = 5t \\ &\qquad x_3(t) = t + 8 \\ &\qquad x_4(t) = t^2 - t + 1. \end{aligned}$$

3. Jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ z $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ LN nebo LZ?
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Nechť $x_1, x_2, x_3, x \in \mathcal{P}_3$. Platí $x \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$?
$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{C} \\ &\qquad x_1(t) = 1 + t - 2t^2 \\ &\qquad x_2(t) = 7 - 8t + 7t^2 \\ &\qquad x_3(t) = 3 - 2t + t^2 \\ &\qquad x(t) = 2 + 4t - t^2. \end{aligned}$$

5. Najděte $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby vektory $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3$ v $\mathbb{C}^{2,2}$ byly LZ.
$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ i & \alpha+i \end{pmatrix}, \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & \alpha+2 \\ i & \alpha+i \end{pmatrix}, \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Dokažte přímo z definice, že vektory $\vec{x}, \vec{y}$ z vektorového prostoru V nad tělesem T jsou LZ $\Leftrightarrow (\exists \alpha \in T)(\vec{x} = \alpha\vec{y} \vee \vec{y} = \alpha\vec{x})$.

7. Nechť x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jsou vektory z $\mathcal{P}$. Najděte bázi $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]_\lambda$.
$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{C} \\ &\qquad x_1(t) = 3 - 4t + t^2 + 2t^3 \\ &\qquad x_2(t) = 5 + 26t - 9t^2 - 12t^3 \\ &\qquad x_3(t) = 2 - 5t + 8t^2 - 3t^3 \\ &\qquad x_4(t) = 2 + 3t - 4t^2 + t^3 \\ &\qquad x_5(t) = 1 + 2t + 3t^2 - 4t^3. \end{aligned}$$

8. Nechť x_1, x_2, x_3 jsou vektory z $\mathcal{P}_5$. Najděte $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tak, aby $\dim[x_1, x_2, x_3]_\lambda < 3$.
$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{C} \\ &\qquad x_1(t) = 1 + 4t - 2t^2 + 3t^3 + t^4 \\ &\qquad x_2(t) = 2 + 4t - 3t^2 - 2t^3 + 3t^4 \\ &\qquad x_3(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + 11t^4. \end{aligned}$$

9. Nechť $V = (0, +\infty)$, $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\vec{x} = x \in (0, +\infty)$ a $\vec{y} = y \in (0, +\infty)$ a pro každé $\alpha \in T$ definujeme:
$$\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y, \ \alpha \odot \vec{x} = x^\alpha.$$
Dokažte, že V je vektorový prostor nad T. Rozhodněte o LZ vektorů $\vec{x}, \vec{y}$ pro libovolnou volbu $\vec{x}, \vec{y}$. (Tento příklad byl už jako domácí úkol na přednášce LNA1.)