

Vektorový prostor

Z teorie je třeba znát: definici tělesa a vektorového prostoru nad T (pro $T = \mathbb{C}$ hovoříme o komplexním vektorovém prostoru, pro $T = \mathbb{R}$ o reálném vektorovém prostoru), vlastnosti vektorového prostoru plynoucí bezprostředně z definice. Dále je třeba znát pojmy: vektor, matice, polynom.

1. **[přednáška]** Nechť V je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, tj. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$,

těleso $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ definujeme:

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že V s takto definovanými operacemi je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} . Značíme jej \mathbb{R}^2 .

2. Zobecnění příkladu 1.: pokud n je přirozené číslo, T je těleso, V je množina uspořádaných n -tic čísel z tělesa (budeme je zapisovat do sloupců), tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{n} \right\},$$

a operace jsou definovány po složkách,

tj. pro každé $\alpha \in T$ a pro každé $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V$ a každé $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in V$ definujeme:

$$\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \alpha \odot \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix},$$

pak V je vektorovým prostorem nad T . Značíme jej T^n . Nejčastěji budeme pracovat s \mathbb{C}^n nebo \mathbb{R}^n .

3. Nechť T je těleso. Uvědomte si, že pak $T^1 = T$ tvoří vektorový prostor nad T . Speciálně \mathbb{C} je komplexním vektorovým prostorem, \mathbb{R} je reálným vektorovým prostorem, \mathbb{Q} je vektorovým prostorem nad \mathbb{Q} .
4. Nechť n je přirozené číslo, T je těleso. Rozmyslete si, že pokud $T' \subset T$ a T' je těleso, pak T^n tvoří vektorový prostor nad T' . Speciálně \mathbb{C}^n je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} i nad \mathbb{Q} , \mathbb{R}^n je vektorovým prostorem nad \mathbb{Q} . Pozor! Naopak to neplatí: \mathbb{R}^n není vektorovým prostorem nad \mathbb{C} , \mathbb{Q}^n není vektorovým prostorem nad \mathbb{C} ani nad \mathbb{R} .
5. **[cvičení]** Nechť V je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, těleso $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ definujeme:

(a)

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b)

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

Je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad \mathbb{R} ?

6. **[cvičení]** Nechť V je množina kladných reálných čísel, tj. $V = \{x > 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$, těleso $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ (tj. $\vec{x} = x > 0, \vec{y} = y > 0$) definujeme $\vec{x} \oplus \vec{y} = xy$ a $\alpha \odot \vec{x} = x^\alpha$. Je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad \mathbb{R} ?

7. **[cvičení]** Nechť V je podmnožina \mathbb{C}^3 složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pro které platí:

- (a) $x_1 \in \mathbb{R}$,
- (b) $x_1 = 0$,
- (c) $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$,
- (d) $x_1 + x_2 = 0$,
- (e) $x_1 + x_2 = 1$,
- (f) $x_1 = x_2 \wedge x_1 \neq x_3$,
- (g) všechny složky jsou reálné,
- (h) $x_1 = x_2$,
- (i) $x_1 \neq x_2$,
- (j) $x_1 + 2x_3 = 0$,
- (k) $x_1 + 2x_3 = 1$.

Která z těchto množin je při zachování operací v \mathbb{C}^3 (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách) vektorovým prostorem nad \mathbb{C} ?

8. Nechť T je těleso. Analogicky jako v příkladu 2. se ověří, že množina matic rozměru $m \times n$ s prvky z T s operacemi definovanými po prvcích tvoří vektorový prostor nad T .
9. Nechť V je podmnožina $\mathbb{R}^{2,2}$ tvořená

- (a) tzv. symetrickými maticemi, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}, a_{12} = a_{21} \right\},$$

- (b) tzv. diagonálními maticemi, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zjistěte, zda V je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} .

10. Nechť \mathcal{P} je množina polynomů s operacemi definovanými bodově, tj. pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a každý polynom $x \in \mathcal{P}$ a $y \in \mathcal{P}$ definujeme:

$$(x \oplus y)(t) = x(t) + y(t) \quad \text{a} \quad (\alpha \odot x)(t) = \alpha x(t) \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

Ověřte, že \mathcal{P} tvoří vektorový prostor nad \mathbb{C} .

11. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Ověřte, že také množina \mathcal{P}_n tvořená polynomy stupně nejvýše $n - 1$ a nulovým polynodem (jeho stupeň není definován) nad tělesem \mathbb{C} tvoří vektorový prostor (operace definovány jako v předchozím příkladu).

Zapamatujte si

Nejdůležitější příklady vektorových prostorů: T^n nad tělesem T , $T^{m,n}$ nad tělesem T , vektorový prostor polynomů \mathcal{P} nad tělesem \mathbb{C} , vektorový prostor polynomů \mathcal{P}_n stupně nejvýše $n-1$ s přidáním nulového polynomu nad tělesem \mathbb{C} .

Pro zajímavost

1. Uvažujme množinu V reálných posloupností s operacemi definovanými po složkách, tj. necht $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme:

$$a \oplus b = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{a} \quad \alpha \odot a = (\alpha a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Pak V je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} .

- (a) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nulami na prvních deseti místech tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 - (b) Podmnožina tvořená posloupnostmi s prvním místem nenulovým, tj. posloupnostmi a s $a_1 \neq 0$, netvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 - (c) Podmnožina tvořená posloupnostmi s konečným počtem nenul tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 - (d) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nekonečným počtem nul netvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 - (e) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nulovou limitou tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 - (f) Podmnožina tvořená konvergentními posloupnostmi s nenulovou limitou netvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
2. Uvažujme množinu V reálných funkcí definovaných na intervalu (a, b) , kde $a, b \in \mathbb{R}$, s operacemi definovanými bodově, tj. necht $f, g \in V$ a necht $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme:

$$(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t) \quad \text{a} \quad (\alpha \odot f)(t) = \alpha f(t) \quad \text{pro každé } t \in (a, b).$$

Pak V je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} .

- (a) Podmnožina tvořená omezenými funkcemi tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
- (b) Podmnožina tvořená funkcemi s tzv. konečným nosičem, tj.

$\{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{existuje konečná } X \subset (a, b) \text{ taková, že } f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in (a, b) \setminus X\}$,
tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .

- (c) Podmnožina tvořená polynomy s reálnými koeficienty tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .

Výsledky: Vektorový prostor

1. Je třeba prověřit: (a) uzavřenost vůči operacím (b) axiomy
2. Viz přednáška.
3. Stačí si uvědomit, že jediný rozdíl mezi prvky tělesa T a vektorového prostoru T je ten, že v prvním případě jsou to reálná čísla a v druhém reálná čísla v závorkách.
4. Stačí zkontrolovat uzavřenost. Axiomy platit musí.
5. Není vektorový prostor.

- (a) Neplatí např. axiom o násobení jedničkou.
 - (b) V prostoru neexistuje nulový vektor.
6. V je vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 7. Stačí prověřovat uzavřenost. Vektorové prostory nad \mathbb{C} jsou (b), (d), (h), (j).
 8. Viz přednáška.
 9. (a), (b) Jsou to vektorové prostory. Stačí prověřit uzavřenost, protože axiomy byly prověřeny v $\mathbb{R}^{2,2}$.
 10. Viz přednáška.
 11. Viz přednáška.