Podprostor

Z teorie je nutné znát pojmy: podprostor, součet podprostorů $P+Q$, průnik podprostorů $P\cap Q$. A je důležité vědět, že $P+Q$ a $P\cap Q$ jsou vektorové prostory, a tudíž má smysl hledat jejich bázi a dimenzi. Také využijeme 1. větu o dimenzi.

1. **[cvičení]** Zjistěte, zda množina $M\subset\mathbb{C}^3$ je podprostor $\mathbb{C}^3$, a pokud je, určete bázi a dimenzi M. (Využijte faktu, že dimenze vlastního podprostoru je menší než dimenze prostoru samého.)

   (a) $M=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid x_j\in Z \quad \forall j\in\{1,2,3\}\}$,

   (b) $M=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid x_1-2x_2+x_3=0\}$,

   (c) $M=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid x_1-2x_2+x_3=0\wedge x_1-x_3=0\}$,

   (d) $M=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid x_1-2x_2+x_3=1\}$.

2. **[cvičení]** Nechť $P\subset\subset\mathbb{R}^3$, $Q\subset\subset\mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li $P=[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}]_\lambda$ a $Q=[\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}]_\lambda$.

3. **[cvičení]** Nechť $P\subset\subset\mathbb{R}^4$, $Q\subset\subset\mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li
$$P=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \mid x_2+3x_3+x_4=0\wedge 2x_1+x_2+3x_3-x_4=0\},$$
$$Q=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \mid -2x_1+x_2+5x_3+5x_4=0\wedge 4x_1+3x_2+5x_3-5x_4=0\}.$$

4. **[cvičení]** Nechť $P\subset\subset\mathbb{C}^3$, $Q\subset\subset\mathbb{C}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li
$$P=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid 2x_1+4x_2-3x_3=0\}\text{ a}$$

   (a) $Q=[\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}]_\lambda$.

   (b) $Q=[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}]_\lambda$.

5. Nechť $P\subset\subset\mathbb{R}^3$, $Q\subset\subset\mathbb{R}^3$, $V\subset\subset\mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P\cap Q\cap V$, je-li $P=[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}]_\lambda$, $Q=[\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\-5\\5\end{pmatrix}]_\lambda$ a $V=[\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\5\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}]_\lambda$.

Zapamatujte si

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $M \subset V$.

1. $M \subset\subset V$ právě tehdy, když M je vektorovým prostorem nad T (operace definovány stejně jako ve V).
2. Jsou-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ vektory z V, pak $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ je nejmenší podprostor V, který vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ obsahuje.
3. Pokud $P \subset\subset V$ a $Q \subset\subset V$, potom nejmenší podprostor V obsahující P i Q (tedy i jejich sjednocení) je $P + Q$. POZOR! $P \cup Q$ obecně podprostor V netvoří.

   Příklad: Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $P = [\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)]_\lambda$ a $Q = [\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)]_\lambda$, pak $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \notin P \cup Q$, a tedy $P \cup Q$ není podprostorem V.

Pro zajímavost

1. Ukažte, že matice s prvky z T rozměru $m \times n$, které mají na předepsaných místech nuly, tvoří podprostor $T^{m,n}$.
2. Rozmyslete si, že vektorový prostor T nad T má jen dva podprostory: $\{0\}$ a sám sebe T.
3. Nechť V je podmnožina $\mathbb{R}^{2,2}$ tvořená
   (a) tzv. symetrickými maticemi, tj.
   $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22} \in \mathbb{R},\ a_{12} = a_{21} \right\},$$
   (b) tzv. diagonálními maticemi, tj.
   $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$
   Zjistěte, zda $V \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$.

Výsledky: Podprostor

1. (a) M není uzavřená vůči násobení číslem z C,
   (b) M je podprostor dimenze 2,
   (c) M je podprostor dimenze 1,
   (d) M není uzavřená vůči operacím.
2. $\dim P + Q = 3, \dim P \cap Q = 1$, báze $P + Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
3. $\dim P + Q = 3, \dim P \cap Q = 1$, báze $P + Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

4. (a) $\dim P+Q=3, \dim P\cap Q=1$, báze $P+Q$ je např. $\mathcal{E}_3$, báze $P\cap Q$ je např. $(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

   (b) $\dim P+Q = \dim P\cap Q = \dim P = \dim Q = 2$, tj. $P+Q = P\cap Q = P = Q$, báze je u všech těchto prostorů např. $(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

5. Platí $P\cap Q\cap V = P$, proto $\dim P\cap Q\cap V = 2$ a báze je např. $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix})$.

Pro zajímavost

1. Snadno uvážíme, že při sčítání a násobení číslem se nuly zachovávají.

2.

3. Obě vlastnosti se při sčítání a násobení číslem zachovávají.