Lineární funkcionál

Z teorie je nutné znát pojmy: lineární funkcionál, jádro, hodnost a defekt lineárního funkcionálu. Také využijeme 2. větu o dimenzi.

1. **[cvičení]** Nechť je definován funkcionál $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ následujícím způsobem

   (a) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$,

   (b) $\varphi(\vec{x}) = 0$,

   (c) $\varphi(\vec{x}) = |x_1|$,

   (d) $\varphi(\vec{x}) = \mathrm{Re}(x_1)$,

   (e) $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X}$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$ definována následovně $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$,

   (f) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2\alpha_2 - x_2 + \alpha_3$ za stejných předpokladů jako v předchozím bodě.

   Zjistěte, zda $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$. V kladném případě najděte hodnost $h(\varphi)$, defekt $d(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.

Lineární zobrazení

Z teorie je nutné znát pojmy: lineární zobrazení, jádro, hodnost a defekt lineárního zobrazení, matice zobrazení. Také využijeme 2. větu o dimenzi.

1. **[cvičení]** Nechť je definováno zobrazení $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ následujícím způsobem

   (a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathrm{Im}(x_2 - x_3) \end{pmatrix}$,

   (b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 - ix_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

   (c) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

   Zjistěte, zda $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$. V kladném případě najděte hodnost $h(A)$, defekt $d(A)$ a bázi $\ker A$.

2. **[cvičení]** Zjistěte, v kterém případě je $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Pokud není, vysvětlete proč. Pokud je, najděte $h(A), d(A), \mathrm{ker} A$. Pro každé $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$(a) \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (b) \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ iy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Určete $h(A),\ d(A)$.

   (b) Doplňte $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ na bázi $A(\mathbb{R}^2)$.

   (c) Najděte bázi $\ker A$.

   (d) Je A regulární operátor? Vysvětlete.

4. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X}$ báze prostoru $\mathbb{C}^3$ a $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{C}^2$ jsou definovány následovně $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. V případech z 1. cvičení, kdy $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$, sestavte

   (a) ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$,

   (b) ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{Y}}$,

   (c) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}$,

   (d) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

5. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X}$ báze prostoru $\mathbb{C}^3$ a $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{C}$ jsou definovány následovně $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a $\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$. Sestavte matici ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}}$ funcionálu φ z kapitoly Lineární funcionál příkladu 1.(a) v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

6. Nechť $A : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definované následovně $(Ax)(t) = x(t+1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Ověřte, že $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$, v níž pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí
$$x_1(t) = t - t^2,\ x_2(t) = 1 - t + t^2,\ x_3(t) = -1 + t.$$

7. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ zadané obrazy bazických vektorů prostoru $\mathbb{C}^3$ následovně
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
   Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$.

8. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a nechť ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze $\mathbb{R}^2$.

9. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3. Sestavte ${}^{\mathcal{Y}}A$, $\mathcal{Y} = (2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3, 3\vec{x}_1 + 4\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 2\vec{x}_3)$.

10. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$,

    ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Nalezněte $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

11. **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze $\mathbb{R}^2$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Nechť ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a nechť pro každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ platí $B\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}_2}(A + 2B)^{\mathcal{X}}$.

12. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

    Úkoly:

    (a) Najděte bázi $A(\mathbb{C}^4)$ a určete hodnost $h(A)$ a defekt $d(A)$.

    (b) Najděte bázi jádra.

    (c) Nalezněte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^4)$. Zobrazení A je definováno obrazy bazických vektorů $A\binom{2}{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\binom{1}{1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ a ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, báze $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ jsou tvaru

    $$\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{Z} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

    Nalezněte ${}^{\mathcal{E}_2}(BA)^{\mathcal{Z}}$.

14. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. Nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^{\#}$, ${}^{\mathcal{E}_2}\varphi^{\mathcal{Z}} = (1, 1)$, kde $\mathcal{Z} = (3)$. Najděte bázi jádra φA.

15. **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^3), B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3), {}^{\mathcal{E}_3}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$, kde $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete hodnost zobrazení BA.

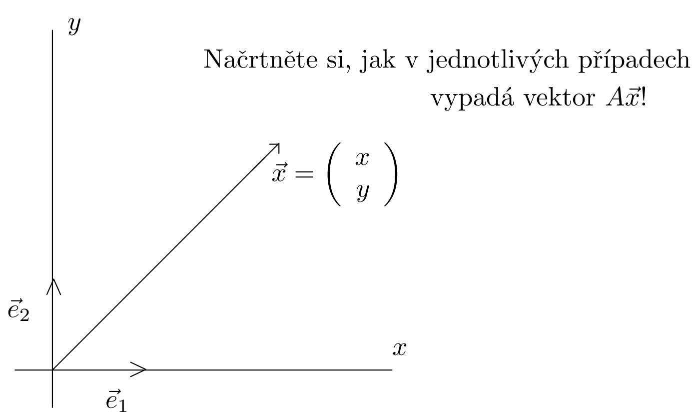
Pro zajímavost

1. Proč žádné zobrazení $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^2$ není lineární?

2. Nechť $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je definované pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ jako $A\vec{x} = (\vec{x})_{\mathcal{X}}$, kde $\mathcal{X} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1)$. Najděte $A(\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right)\})$, $A([\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)]_\lambda)$, $A^{-1}(\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right)\})$, $A^{-1}([\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)]_\lambda)$. Je A epimorfní, monomorfní?

3. Nechť $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je definované pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ jako
$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^{\#}(\vec{x}) \\ \vec{x}_2^{\#}(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix},$$
kde $\mathcal{X} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1)$. Najděte $A(\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right)\})$, $A([\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)]_\lambda)$, $A^{-1}(\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\2\\0\end{smallmatrix}\right)\})$, $A^{-1}([\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)]_\lambda)$. Je A epimorfní, monomorfní?

4. **[cvičení]** Nechť $\mathbb{A}$ je reálná matice typu 2×2. Definujeme zobrazení $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ předpisem $A\vec{x} := \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Ověřte, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Zkontrolujte, že operátory A určené následujícími maticemi $\mathbb{A}$ působí tak, jak je uvedeno v závorkách.



   - $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (A je **zrcadlení** nebo **osová souměrnost** podle osy x.)
   - $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (A je **zrcadlení** nebo **osová souměrnost** podle osy $x = y$.)
   - $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (A je **středová souměrnost**.)
   - $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (A je **rotace** o úhel θ po směru hodinových ručiček, matici se říká *elementární matice rotací*.)
   - $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (A je **prodloužení** respektive **zkrácení** ve směru x.)
   - $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (A je **zkosení** ve směru x.)

5. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem. Nechť $A : P \to Q$ je izomorfismus. Ověřte a zapamatujte si:

(a) $\dim P = \dim Q$

(b) Je-li $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ LN soubor, pak $(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n)$ je LN. (Na toto tvrzení stačí A monomorfní.)

(c) Je-li $P_1 \subset\subset P$ a $\dim P_1 = k$, pak $A(P_1) \subset\subset Q$ (na to stačí linearita A) a $\dim A(P_1) = k$.

(d) Je-li $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ báze P, pak $(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n)$ je báze Q.

(e) Analogická tvrzení platí i pro A^{-1}.

6. Jak je možné, že funkcionál $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaný pro každý vektor $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ jako

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

není prostý, ačkoliv $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$?

7. Ukažte, že následující zobrazení $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$ nejsou lineární. Pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ definujeme

(a) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1+3x_2 \\ x_3-2 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1^2 \\ x_2+x_3^2 \end{smallmatrix}\right)$,

(d) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1-\sqrt{|x_2|} \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$,

(e) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$,

(f) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ e^{x_3} \end{smallmatrix}\right)$.

Výsledky: Lineární funkcionál

1. (a) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#, h(\varphi) = 1, d(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

(b) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#, h(\varphi) = 0, d(\varphi) = 3$, báze jádra je např. $\mathcal{E}_3$

(c) $\varphi \notin (\mathbb{C}^3)^\#$

(d) $\varphi \notin (\mathbb{C}^3)^\#$

(e) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#, h(\varphi) = 1, d(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(f) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#, h(\varphi) = 1, d(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Výsledky: Lineární zobrazení

1. (a) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$

(b) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2), h(A) = 2, d(A) = 1$, báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} -2-i \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

(c) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$

2. Viz loňské zkouškové písemky.

3. Viz loňské zkouškové písemky.

4. (a) ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} i & -i & -1+i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} -i & -2-i & -2-i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -1+2i & -1+3i & -1+2i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}} = (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

6. ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

8. ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 23 & 1 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$

9. ${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10. $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}$

11. ${}^{\mathcal{E}_2}(A+2B)^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -81 & -27 \\ -56 & -19 \end{pmatrix}$

12. (a) báze $A(\mathbb{C}^4)$ je např. $\mathcal{E}_2, h(A) = 2, d(A) = 2$

    (b) báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$

    (c) $A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}]_\lambda$

13. ${}^{\mathcal{E}_2}(BA)^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

14. báze jádra φA je např. $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

15. pro $\alpha \neq -3$ je $h(BA) = 3$, pro $\alpha = -3$ je $h(BA) = 2$