



Eduard Šubert: *Koktejl – nápoj je vektorem z lineárního obalu ingrediencí.*

V roce 2012 se na katedře matematiky FJFI ČVUT v Praze konala **Matematická fotosoutěž**. Vítězný snímek – týkající se právě lineární algebry – jsme si se svolením autora vypůjčili pro osvěžení této učebnice.

**Datum sestavení dokumentu: 5. září 2013**

## **Lineární algebra 1**

Autoři: Lubomíra Balková a Jakub Krásenský

Ilustrace: Jakub Klinkovský

e-mail: `lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz`

# Předmluva

Skripta, která držíte v ruce, vznikla v úzké spolupráci se studenty, kteří byli v akademickém roce 2012–2013 prváky. Texty jsem zveřejňovala postupně jako poznámky k přednáškám a studenti mi sdělovali své připomínky k nim, opravovali nalezené překlepy, dávali zlepšující návrhy. Dva z nich nakonec otiskli své stopy do skript tak nesmazatelně, že jsem jim navrhla spoluautorství. (Bohužel jejich jména nefigurují na obálce, protože to podle pravidel není možné, ale to nic opravdovosti jejich spoluautorství neubírá.) **Jakub Krásenský** nesmírně pečlivě texty pročetl, odstranil řadu chyb, vytříbil jazyk a sjednotil styl. Rodící se skripta s ním prožila i prázdniny – procestovala ČR i cizinu, když Jakub vychytával poslední mouchy. **Jakub Klinkovský** se zase chopil ilustrací. Nepřejte si vědět, jak vypadaly obrázky před jeho zásahem. Ovšem poděkování patří i řadě dalších studentů. Jmenovitě pak **Kateřině Jirákové**, která při učení se na zkoušku odhalila četné nepřesnosti, a **Ondřeji Groverovi**, jenž mě zejména upozornil na důležitost formátování.

Skripta jsou určena studentům prvního ročníku „Jaderky“. Zahrnují látku k povinnému předmětu Lineární algebra 1 (LNA1) a volitelnému předmětu Lineární algebra plus (LAP). Symbolem ★ jsou označeny pasáže, které se týkají pouze LAP a v rámci LNA1 není jejich znalost vyžadována. Hvězdičkami je také naznačena obtížnost úkolů, které jsou ponechány čtenáři k řešení (žádná hvězdička = lehký úkol, \* = obtížnější úkol, \*\* = těžký úkol). Dále se v textu objevují poznámky pod čarou, které obsahují směs historických údajů, informací ke značení, terminologii apod. (Jsou určeny k letnému pročtení, nikoliv k učení.)

Lineární algebra je velmi abstraktní, univerzální a logicky vystavěná. Jelikož se na středních školách nevyučuje, budete mít možnost během prvého semestru sledovat, jak se matematická disciplína buduje úplně od základu. Naučíte se pracovat systémem „definice, věta, důkaz“. Navíc kouzlo lineární algebry spočívá v jednoduchosti důkazů (žádné umělé konstrukce jako v matematické analýze).

Začátečník zřejmě tento fakt neocení ihned. Dokonce se může stát, že se velkého stupně abstrakce zalekne. Proto je pro něj připravena v dodatku kapitola z historie lineární algebry, která mu prozradí, že pojmy ze začátku semestru, například vektorový prostor, byly v historii až jakousi třešničkou na dortu – vývoj lineární algebry završily. Proto není neobvyklé, že prvákovi v úvodních týdnech semestru připadá lineární algebra nepochopitelná.

Lineární algebra je – opět ve srovnání s matematickou analýzou – mladá disciplína. První učebnice vznikaly až na začátku 20. století. Na FJFI je autorem koncepce kurzu lineární algebry prof. **Miloslav Havlíček**, který ji také zpočátku učil. Dlouhá léta pak přednášel lineární algebru **Jiří Pytlíček**, prom. mat. Svým precizním výkladem, spravedlivým přístupem, ale i pověstnou přísností vchoval celé generace matematiků – mít hotovou zkoušku od Pytlíčka, to totiž něco znamenalo! Asistent Pytlíček se stal legendou, o čemž svědčí i pamětní deska, již „mimořádnému učiteli, který na FJFI v letech 1966–2011 svým

nezaměnitelným způsobem přednášel lineární algebru“ věnovali studenti z vlastní iniciativy. I v těchto skriptech tu a tam na asistenta Pytlíčka zavzpomínáme a připomeneme jeho slavné výroky.

Pytlíčkův přístup k lineární algebře by se dal označit za bourbakistický<sup>1</sup> – razil názor, že lineární algebra je krásná ve své abstraktnosti a obecnosti a není třeba tuto krásu zastírat ilustracemi pojmů na konkrétních obyčejných příkladech (alespoň ne během přednášek a ve skriptech). V tomto směru jsem se ovšem nesnažila asistenta Pytlíčka kopírovat. Místo toho jsem se nechala ovlivnit doc. **Emilem Humhalem**, který taktéž dlouhá léta lineární algebru přednášel (ovšem hlavně studentům nematematických směrů) a prosazoval zásadu, že i přes abstraktnost může lineární algebru na postačující úrovni pochopit každý pilný student. Proto se snažíme ilustrovat nové pojmy a práci s nimi na příkladech a nechybí ani motivační texty, které mají čtenáři ukázat, že lineární algebra je všudypřítomná a že její poznatky ještě mnohokrát zužitkuje. (Z motivačních úloh se ale samozřejmě nezkouší.)

Jsem velmi ráda, že lektorkou skript se stala prof. **Edita Pelantová**, která se postarala, abychom ve své snaze vše vyložit nezacházeli až do zbytečných detailů. A zejména díky své peanovské<sup>2</sup> schopnosti odhalovat chyby a zjednodušovat důkazy pohlídala korektnost tvrzení a matematickou eleganci důkazů.

Závěrečný dík pak patří Ing. **Petru Ambrožovi**, Ph.D., a Ing. **Tomáši Hejdovi** za jejich cenné rady týkající se formátování a typografie.

V Třeboni 1. srpna 2013

Lubomíra Balková

---

<sup>1</sup>Nicolas Bourbaki byl pseudonym, pod kterým od roku 1935 publikovala své práce skupina převážně francouzských matematiků. Členové této skupiny jsou označováni jako bourbakisté. Jejich cílem bylo vybudovat celou matematiku axiomaticky na základě teorie množin. A to co nejobecněji, naprosto rigorózně a zásadně bez použití obrázků, příkladů a bez zájmu o aplikace.

<sup>2</sup>Italský matematik Giuseppe Peano – jak je uvedeno i v Dodatku 2: Historie vektorového prostoru – měl schopnost snadno nacházet chyby a protipříklady a v matematických diskuzích a textech se vyjadřoval přesněji než všichni ostatní.

# Seznam použitých symbolů

## Použitá písmena řecké abecedy a jejich výslovnost

|           |          |
|-----------|----------|
| $\alpha$  | „alfa“   |
| $\beta$   | „beta“   |
| $\gamma$  | „gama“   |
| $\delta$  | „delta“  |
| $\Theta$  | „théta“  |
| $\kappa$  | „kapa“   |
| $\lambda$ | „lambda“ |
| $\pi$     | „pí“     |
| $\varphi$ | „fí“     |

## Další použité symboly

|                             |                                                                             |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| ★                           | povinné pro studenty LAP – pro ostatní<br>nepovinné, nikoliv nepřístupné :) |
| *                           | obtížnější úkol                                                             |
| **                          | těžký úkol                                                                  |
| $\hat{n}$                   | $\{1, 2, \dots, n\}$                                                        |
| $\emptyset$                 | prázdná množina                                                             |
| $\mathbb{N}$                | množina přirozených čísel                                                   |
| $\mathbb{N}_0$              | $\mathbb{N} \cup \{0\}$                                                     |
| $\mathbb{Z}$                | množina celých čísel                                                        |
| $\mathbb{Q}$                | množina racionálních čísel                                                  |
| $\mathbb{R}$                | množina reálných čísel                                                      |
| $\mathbb{C}$                | množina komplexních čísel                                                   |
| $\operatorname{Re}(\alpha)$ | reálná část $\alpha$                                                        |
| $\operatorname{Im}(\alpha)$ | imaginární část $\alpha$                                                    |
| $\bar{\alpha}$              | číslo komplexně sdružené k $\alpha$                                         |
| $\langle 0, 1 \rangle$      | uzavřený interval                                                           |
| $:=$                        | rovnost definující nový objekt                                              |
| $\delta_{ij}$               | Kroneckerovo delta                                                          |
| $\in$                       | náležet, být prvkem                                                         |
| $A \times B$                | kartézský součin množin                                                     |
| $A \subset B$               | $A$ je podmnožinou $B$ (mohou se rovnat)                                    |
| $A \subsetneq B$            | $A$ je podmnožinou $B$ , ale nerovna jí se                                  |
| $\bigcap_{i=1}^{\ell}$      | průnik $\ell$ množin                                                        |
| $\mathbb{A}$                | matice (soustavy)                                                           |

|                                                        |                                                                     |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $(\mathbb{A} \vec{b})$                                 | rozšířená matice soustavy                                           |
| $\mathbb{A}\mathbb{B}, \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$    | součin matic                                                        |
| $\mathbb{O}$                                           | nulová matice                                                       |
| $\mathbb{I}$                                           | jednotková matice                                                   |
| $\sim$                                                 | ekvivalentní řádková úprava                                         |
| $T$                                                    | (číselné) těleso                                                    |
| $V$                                                    | vektorový prostor                                                   |
| $\alpha, \beta, \gamma$                                | čísla z tělesa                                                      |
| $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ | vektory                                                             |
| $\vec{0}$                                              | nulový vektor                                                       |
| $-\vec{a}$                                             | opačný vektor k $\vec{a}$                                           |
| $\vec{a} \oplus \vec{b}$                               | sčítání vektorů                                                     |
| $\alpha \odot \vec{a}$                                 | násobení vektoru číslem                                             |
| $T^n$                                                  | prostor $n$ -tic čísel                                              |
| $T^{m,n}$                                              | prostor matic o $m$ řádcích a $n$ sloupcích                         |
| $m \times n$                                           | typ matice – $m$ řádků a $n$ sloupců                                |
| $\mathbb{A}_{ij}, [\mathbb{A}]_{ij}, a_{ij}$           | prvek matice v $i$ -tém řádku a $j$ -tém sloupci                    |
| $\mathbb{A}_{i\bullet}$                                | $i$ -tý řádek matice $\mathbb{A}$                                   |
| $\mathbb{A}_{\bullet j}$                               | $j$ -tý sloupec matice $\mathbb{A}$                                 |
| $p$                                                    | polynom                                                             |
| st $p$                                                 | stupeň polynomu                                                     |
| $\mathcal{O}$                                          | nulový polynom                                                      |
| $\mathcal{P}$                                          | prostor polynomů                                                    |
| $\mathcal{P}_n$                                        | prostor polynomů stupně maximálně $n - 1$                           |
| $\mathcal{E}$                                          | standardní báze $T^n, T^{m,n}, \mathcal{P}_n$                       |
| $\mathcal{E}_n$                                        | standardní báze $T^n$ (pro zdůraznění dimenze)                      |
| $\vec{e}_i$                                            | vektor ze standardní báze $T^n$                                     |
| $\mathbb{E}_{i,j}$                                     | vektor ze standardní báze $T^{m,n}$                                 |
| $e_i$                                                  | vektor ze standardní báze $\mathcal{P}_n$                           |
| $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$                      | lineární kombinace vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ |
| $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$     | lineární obal vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$      |
| $\dim V$                                               | dimenze $V$                                                         |
| $V_n$                                                  | prostor dimenze $n$                                                 |
| $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$             | soubor vektorů                                                      |
| $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$                | báze vektorového prostoru                                           |
| $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$                              | souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$                   |
| $x_i^\#$                                               | $i$ -tý souřadnicový funkcional v bázi $\mathcal{X}$                |
| $\subset \subset$                                      | podprostor                                                          |
| $P + Q$                                                | součet množin                                                       |

|                                                   |                                                                |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $P \oplus Q$                                      | direktní součet množin                                         |
| $P \cong Q$                                       | izomorfní podprostory                                          |
| $\operatorname{codim} P$                          | kodimenze podprostoru $P$                                      |
| $\Theta$                                          | nulové zobrazení                                               |
| $I$                                               | identický operátor                                             |
| $A, B, C$                                         | lineární zobrazení                                             |
| $D$                                               | operátor derivování                                            |
| $S$                                               | operátor integrování                                           |
| $AB$                                              | složené zobrazení                                              |
| $A\vec{x}$                                        | obraz vektoru $\vec{x}$                                        |
| $A(M)$                                            | obraz množiny $M$                                              |
| $A^{-1}(N)$                                       | vzor množiny $N$                                               |
| $\mathcal{L}(P, Q)$                               | prostor lineárních zobrazení $P$ do $Q$                        |
| $\varphi$                                         | funkcionál                                                     |
| $\ker A$                                          | jádro $A$                                                      |
| $d(A)$                                            | defekt $A$                                                     |
| $h(A)$                                            | hodnost $A$                                                    |
| $V^\#$                                            | duální prostor k $V$                                           |
| $\mathcal{X}^\#$                                  | duální báze k bázi $\mathcal{X}$                               |
| ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$                 | matice zobrazení $A$ v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$    |
| ${}^{\mathcal{X}}A$                               | matice operátoru $A$ v bázi $\mathcal{X}$                      |
| $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\alpha$ | afinní obal vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$   |
| $W$                                               | lineární varieta                                               |
| $\mathcal{Z}(W)$                                  | zaměření $W$                                                   |
| $\alpha W_1 + \beta W_2$                          | lineární kombinace $W_1$ a $W_2$                               |
| $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\kappa$ | konvexní obal vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ |
| $K$                                               | konvexní množina                                               |

# Obsah

|          |                                                   |           |
|----------|---------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Soustavy lineárních algebraických rovnic</b>   | <b>13</b> |
| <b>2</b> | <b>Vektorový prostor</b>                          | <b>18</b> |
| 2.1      | Definice vektorového prostoru . . . . .           | 18        |
| 2.2      | Příklady vektorových prostorů . . . . .           | 24        |
| 2.3      | Lineární kombinace vektorů . . . . .              | 28        |
| 2.4      | Lineární závislost a nezávislost . . . . .        | 31        |
| 2.5      | Báze a dimenze . . . . .                          | 34        |
| 2.6      | Souřadnice . . . . .                              | 44        |
| <b>3</b> | <b>Podprostory</b>                                | <b>49</b> |
| 3.1      | Definice podprostoru . . . . .                    | 49        |
| 3.2      | První věta o dimenzi . . . . .                    | 54        |
| 3.3      | Doplňěk podprostoru . . . . .                     | 58        |
| <b>4</b> | <b>Lineární zobrazení</b>                         | <b>60</b> |
| 4.1      | Definice lineárního zobrazení . . . . .           | 60        |
| 4.2      | Hodnost, jádro, defekt . . . . .                  | 69        |
| 4.3      | Druhá věta o dimenzi . . . . .                    | 74        |
| 4.4      | Izomorfismus . . . . .                            | 75        |
| 4.5      | Doplňěk na prostoru nekonečné dimenze ★ . . . . . | 77        |
| 4.6      | Projektor ★ . . . . .                             | 78        |
| 4.7      | Duální báze ★ . . . . .                           | 79        |
| <b>5</b> | <b>Frobeniova věta</b>                            | <b>81</b> |
| 5.1      | Matice a lineární zobrazení . . . . .             | 81        |
| 5.2      | Hodnost matice . . . . .                          | 88        |
| 5.3      | Vztah hodnosti matice a zobrazení . . . . .       | 88        |
| 5.4      | Regulární a singulární matice . . . . .           | 89        |
| 5.5      | Frobeniova věta . . . . .                         | 90        |
| 5.6      | Hodnost součinu matic . . . . .                   | 92        |
| 5.7      | Hodnost transponované matice ★ . . . . .          | 92        |
| <b>6</b> | <b>Lineární geometrie ★</b>                       | <b>96</b> |
| 6.1      | Lineární variety . . . . .                        | 96        |
| 6.2      | Afinní obaly . . . . .                            | 97        |
| 6.3      | Variety jako posunuté podprostory . . . . .       | 99        |
| 6.4      | Vzájemná poloha variet a operace s nimi . . . . . | 101       |
| 6.5      | Variety jako afinní obaly . . . . .               | 103       |



|          |                                                 |            |
|----------|-------------------------------------------------|------------|
| 6.6      | Variety jako průniky nadrovin . . . . .         | 106        |
| <b>7</b> | <b>Konvexní množiny ★</b>                       | <b>109</b> |
| <b>8</b> | <b>Dodatek 1: Polynomy</b>                      | <b>114</b> |
| <b>9</b> | <b>Dodatek 2: Historie vektorového prostoru</b> | <b>118</b> |
|          | <b>Rejstřík</b>                                 | <b>124</b> |
|          | <b>Reference</b>                                | <b>127</b> |

---

# 1 Soustavy lineárních algebraických rovnic

Řešení soustav lineárních algebraických rovnic (LAR) je základní dovedností, bez níž se v lineární algebře neobejdeme. Proto se hned v úvodní kapitole naučíme rozhodnout, zda je daná soustava LAR řešitelná, a najít alespoň jedno řešení (pokud soustava řešitelná je). Na kompletní popis množiny řešení soustavy LAR budeme muset počkat až do konce semestru – elegantně jej formuluje Frobeniova věta.

**Soustavou  $m$  lineárních algebraických rovnic (LAR) pro  $n$  neznámých** nazveme každou sadu rovnic tvaru:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde čísla  $a_{ij}$  a  $b_i$  pro  $i \in \widehat{m}$  a  $j \in \widehat{n}$  jsou komplexní.

Názvosloví:

- Sloupec  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  se nazývá **sloupcem pravé strany**.
- Sloupec komplexních čísel  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , pro něž jsou všechny rovnosti splněny, se nazývá **řešením soustavy**.
- **Maticí soustavy** rozumíme tabulku koeficientů u neznámých (v  $i$ -tém řádku jsou koeficienty z  $i$ -té rovnice):

$$\mathbb{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- **Rozšířenou maticí soustavy** nazýváme matici soustavy rozšířenou o sloupec pravé strany:

$$(\mathbb{A}|\vec{b}) := \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

- Říkáme, že soustava je **homogenní** neboli **bez pravé strany**, pokud je sloupec pravé strany nulový, tj.  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ .
- V opačném případě se jedná o **soustavu s pravou stranou**.
- Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, a to řešení  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Toto řešení nazýváme **triviálním**.

**Poznámka 1.1.** Důležité je uvědomit si, že existují soustavy, jež řešení nemají. Například

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 7. \end{aligned}$$

A naopak existují soustavy, které jich mají více. Například

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 6x_1 + 4x_2 &= 10 \end{aligned}$$

má řešení  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  a také  $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Dokonce má nekonečně mnoho řešení.

V této kapitole se nebudeme učit hledat všechna řešení, ale budeme se zabývat dvěma trochu lehčími otázkami:

- (a) „Jak zjistit, zda je daná soustava řešitelná?“
- (b) „Jak najít alespoň jedno řešení?“ (Samozřejmě za předpokladu, že soustava je řešitelná.)

Budeme převádět soustavu do tak jednoduchého tvaru, že z něj bude odpověď na tyto dvě otázky zřejmá. Důležité je, že úpravy budeme provádět tak, abychom neměnili množinu řešení. Takovým úpravám se říká **ekvivalentní** a budeme používat následující tři:

1. záměna dvou rovnic,
2. přičtení násobku jiné rovnice k vybrané rovnici,
3. násobení rovnice číslem  $\alpha \neq 0$ .

Snadno nahlédneme, že takovými úpravami se skutečně množina řešení soustavy nemění. Pro zjednodušení nemusíme tyto úpravy provádět s rovnicemi, ale můžeme je provádět přímo v rozšířené matici soustavy. Jde potom o úpravy:

1. záměna dvou řádků,

2. přičtení násobku jiného řádku k vybranému řádku,
3. násobení řádku číslem  $\alpha \neq 0$ .

Tyto úpravy budeme provádět s cílem dostat rozšířenou matici soustavy do tzv. horního stupňovitého tvaru.<sup>3</sup>

**Definice 1.2.** Matice  $\mathbb{B}$  o  $m$  řádcích a  $n + 1$  sloupcích s prvky  $b_{ij}, i \in \widehat{m}, j \in \widehat{n+1}$ , tedy tabulka čísel

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & b_{1(n+1)} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & b_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} & b_{m(n+1)} \end{pmatrix},$$

je v **horním stupňovitém tvaru**, pokud má všechny prvky nulové, nebo existuje  $\ell \in \widehat{m}$  a indexy  $k_1, k_2, \dots, k_\ell$  takové, že  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_\ell \leq n + 1$  a platí:

1.  $b_{ik_i} \neq 0$  pro každé  $i \in \widehat{\ell}$ ,
2.  $b_{ij} = 0$  pro každé  $i \in \widehat{\ell}$  a  $j < k_i$ ,
3.  $b_{ij} = 0$  pro každé  $i > \ell, j \in \widehat{n+1}$ .

Nenulová matice v horním stupňovitém tvaru má tudíž tyto vlastnosti: V prvním řádku je první nenulový prvek ve sloupci  $k_1$ , ve druhém řádku ve sloupci  $k_2, \dots$ , až v  $\ell$ -tém řádku ve sloupci  $k_\ell$ . Od  $(\ell + 1)$ . řádku počínaje jsou všechny řádky nulové. Soustava s rozšířenou maticí v horním stupňovitém tvaru má proto následující jednoduchou podobu:

$$\begin{array}{ccccccccc} b_{1k_1}x_{k_1} & + & \dots & + & b_{1k_2}x_{k_2} & + & \dots & + & b_{1k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & b_{1n}x_n & = & b_{1(n+1)} \\ & & & & b_{2k_2}x_{k_2} & + & \dots & + & b_{2k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & b_{2n}x_n & = & b_{2(n+1)} \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & b_{\ell k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & b_{\ell n}x_n & = & b_{\ell(n+1)}. \end{array}$$

Sloupce rozšířené matice soustavy s indexy  $k_1, k_2, \dots, k_\ell$  nazýváme **hlavními sloupci**, ostatní sloupce nazýváme **vedlejšími**. Ze soustavy upravené do horního stupňovitého tvaru jednoduše vyčteme odpověď na řešené problémy.

(a) Soustava je řešitelná, právě když sloupec pravé strany je vedlejší.

Je zřejmé, že když je sloupec pravé strany hlavní, tj.  $k_\ell = n + 1$ , má poslední rovnice tvar  $0 = b_{\ell(n+1)}$ . To znamená, že nula má být rovna nenulovému číslu, což není možné. Fakt, že soustava řešitelná je, když je sloupec pravé strany vedlejší, vyplývá z následujícího tvrzení.

<sup>3</sup>Používá se i termín Gaussova matice, odstupňovaná matice či (redukovaná) schodovitá matice.

- (b) Je-li sloupec pravé strany vedlejší, řešení soustavy nalezneme tak, že neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvolíme libovolně a zbylé neznámé jednoznačně dopočítáme.

Je jasné vidět, že pokud jsou neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvoleny, dopočítáme z poslední rovnice  $x_{k_\ell}$ , po dosazení do předposlední rovnice dopočítáme  $x_{k_{\ell-1}}$  atd.

**Poznámka 1.3.** Není těžké ověřit, že platí následující tvrzení: Soustava má jediné řešení, právě když má matice soustavy jen samé hlavní sloupce a sloupec pravé strany je vedlejší.

Když totiž neexistují vedlejší sloupce v matici soustavy, nelze žádné neznámé volit. Důsledkem poté je, že homogenní soustava má jen triviální řešení, právě když má matice soustavy jen hlavní sloupce. Pokud má matice homogenní soustavy i vedlejší sloupce, pak při hledání netriviálního řešení je třeba zvolit alespoň jednu z neznámých odpovídajících vedlejšímu sloupci nenulovou.

Zbývá zodpovědět otázku: „Lze každou rozšířenou matici soustavy převést ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru?“ Ano! Dokonce stačí první a druhá ekvivalentní řádková úprava. Následující algoritmus se označuje jako **Gaussova eliminace**:<sup>4</sup>

- Je-li matice nulová, pak už je v horním stupňovitém tvaru.
- Je-li matice nenulová, prohledáme první sloupec matice a nalezneme nenulový prvek. Odpovídající řádek zaměníme s prvním řádkem. Není-li v prvním sloupci nenulový prvek, postupujeme stejně s druhým sloupcem. Označíme  $k_1$  index prvního sloupce, ve kterém najdeme nenulové číslo. Od každého řádku počínaje druhým odečteme takové násobky prvního řádku, abychom ve sloupci s indexem  $k_1$  dostali nuly.
- Prohledáváme další sloupce, které jsou na řadě, vždy od druhého řádku počínaje. Index prvního sloupce, v němž najdeme nenulový prvek, označíme  $k_2$ . Odpovídající řádek zaměníme s druhým. Od třetího a dalších řádků odečítáme takové násobky druhého řádku, abychom od třetího řádku počínaje vyrobili ve sloupci s indexem  $k_2$  samé nuly.
- Analogicky postupujeme tak dlouho, dokud jsou v prohledávaných sloupcích na potřebných místech nenulové prvky.

**Příklad 1.4.** Zjistěte, zda je následující soustava řešitelná. Pokud ano, najděte jedno

---

<sup>4</sup>Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik. Eliminační algoritmus nese jméno na Gaussovu počest, ačkoliv byl v jeho době již běžně používán. Více se k historii eliminace a řešení soustav LAR obecně dozvíte v dodatku skript pro letní semestr Lineární algebra 2.

---

řešení.

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 3x_2 & & - 2x_4 = 1 \\ -4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 - 9x_4 = 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & & + x_4 = 0. \end{array}$$

**Řešení:** Rozšířenou matici soustavy upravíme do horního stupňovitého tvaru. Symbol  $\sim$  značí provedení ekvivalentní řádkové úpravy (úprav).

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & -17 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right).$$

Soustava je řešitelná, protože sloupec pravých stran je vedlejší. Řešení najdeme volbou neznámé v jediném vedlejším sloupci, kterým je ten třetí. Zvolíme třeba  $x_3 = 0$ . Zbylé neznámé dopočítáme ze soustavy odpovídající matici v horním stupňovitém tvaru

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 3x_2 & & - 2x_4 = 1 \\ & & 10x_2 & + & 5x_3 - 17x_4 = 4 \\ & & & & 3x_4 = -1. \end{array}$$

Dostáváme  $x_4 = -1/3$ ,  $x_2 = -1/6$ ,  $x_1 = 5/6$ . Řešením je tudíž například  $\begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ .

Na cvičeních si ukážeme, jak upravovat matice do horního stupňovitého tvaru co nejšikovněji. Naučte se, že je lepší si úpravy rozmyslet, než je provádět mechanicky. Jinak budete – podle slov asistenta Pytlíčka – „milovníky zlomků“.