6 Lineární geometrie ★

Motivace. Pojem lineární varieta, který budeme v této kapitole studovat z nejrůznějších úhlů pohledu, není žádnou umělou konstrukcí. Příkladem lineární variety je totiž množina řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde A je lineární zobrazení, nebo také množina řešení soustavy LAR.

V této kapitole zobecníme poznatky ze střední školy týkající se analytické geometrie. Prvky vektorového prostoru už nebudeme nazývat výhradně vektory – častěji budeme hovořit o bodech.

6.1 Lineární variety

K definici lineární variety potřebujeme pojem spojnice bodů.

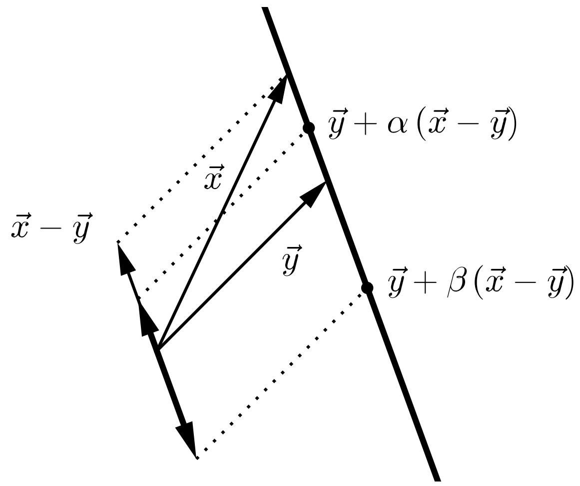
Definice 6.1. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}, \vec{y} \in V$. **Spojnicí** bodů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme množinu:

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \in T\}.$$

Poznámka 6.2. Uveďme ekvivalentní zápisy spojnice:

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \in T\} = \{\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \mid \alpha \in T\} = \{\vec{y} + \alpha(\vec{x} - \vec{y}) \mid \alpha \in T\}.$$

Z posledního zápisu je vidět, že spojnici bodů $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ získáme přičítáním reálných násobků vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ k vektoru $\vec{y}$. Tedy v $\mathbb{R}^2$ odpovídá spojnice tomu, co si pod tímto pojmem každý představí – přímce procházející body $\vec{x}$ a $\vec{y}$, viz obrázek 11.



Obrázek 11: Spojnice bodů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ v $\mathbb{R}^2$.

Definice 6.3. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $W \subset V$. Potom W nazveme **lineární varietou**, pokud platí:

- $W \neq \emptyset$,
- W obsahuje s každými dvěma body i jejich spojnici. [38]

Příklad 6.4. Samotný bod v $\mathbb{R}^2$ vyhovuje definici lineární variety. Stejně tak i přímka a celé $\mathbb{R}^2$. Lineárními varietami v $\mathbb{R}^3$ jsou body, přímky, roviny a celé $\mathbb{R}^3$. Zanedlouho ukážeme, že tento výčet je úplný, tj. že žádné jiné variety v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ neexistují.

6.2 Afinní obaly

Se spojnicí úzce souvisí pojem afinní obal.

Definice 6.5. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V. Pak **afinní kombinací** (AK) vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ nazveme lineární kombinaci $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k$, která navíc splňuje $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1$. Množinu všech afinních kombinací vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ nazýváme jejich **afinním obalem** a značíme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$. Platí tudíž:

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha := \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1 \text{ a } \alpha_k \in T \text{ pro každé } k \in \hat{\ell} \right\}.$$

Poznámka 6.6. Přímo z definice plyne, že afinní obal dvou vektorů je roven jejich spojnici.

Souvislost afinních obalů a lineárních variet je shrnuta následujících třech větách.

Věta 6.7 (Afinní obal je varieta)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť jsou dány vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ z V. Potom $W = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je lineární varieta a W obsahuje $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Protože $\vec{x}_i = 0\vec{x}_1 + \dots + 1\vec{x}_i + \dots + 0\vec{x}_\ell$ pro každé $i \in \hat{\ell}$, je $\vec{x}_i$ afinní kombinací vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$, tedy $\vec{x}_i \in W$. Proto $W \neq \emptyset$. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in W$, pak existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_\ell \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \beta_i = 1$. Pro libovolné $\alpha \in T$ je třeba ukázat, že $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W$.

$$\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} = \alpha \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha\alpha_i + (1-\alpha)\beta_i)\vec{x}_i,$$

kde poslední výraz je afinní kombinace vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$, protože

$$\sum_{i=1}^{\ell} (\alpha\alpha_i + (1-\alpha)\beta_i) = \alpha \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i = \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

Tím je dokázáno, že $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W$ pro libovolné $\alpha \in T$. Proto spojnice $\vec{x}$ a $\vec{y}$ patří do W, což znamená, že W je lineární varieta. □

[38] Jiný používaný název pro lineární varietu je afinní podprostor.

Věta 6.8 (Varieta obsahuje afinní kombinace)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V. Potom platí:*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha \subset W.$$

Slovy: „Lineární varieta obsahuje s libovolnými svými body i všechny jejich afinní kombinace.“

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu vektorů ℓ. Pro $\ell = 1$ triviálně platí. Nechť pro nějaké $\ell \geq 1$ platí, že W s každými ℓ vektory obsahuje i jejich libovolnou afinní kombinaci. Uvažujme nyní $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\ell+1} \in W$ a jejich libovolnou afinní kombinaci, tj. $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i$, kde $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i = 1$. Určitě existuje index $i_0 \in \widehat{\ell+1}$ takový, že $\alpha_{i_0} \neq 1$. Pak můžeme psát:

$$\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} + (1 - \alpha_{i_0}) \sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{i_0}} \vec{x}_i,$$

kde $\vec{y} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{i_0}} \vec{x}_i$ je afinní kombinace ℓ vektorů, protože $\sum_{i=1, i \neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{i_0}} = 1$. Tudíž podle indukčního předpokladu platí, že $\vec{y} \in W$. Jelikož je $\alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} + (1 - \alpha_{i_0}) \vec{y}$ vektor ze spojnice $\vec{x}_{i_0}$ a $\vec{y}$, dostáváme, že $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} + (1 - \alpha_{i_0}) \vec{y}$ leží též ve W. □

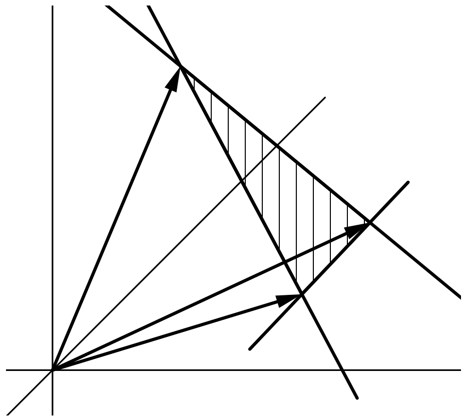
Věta 6.9 (Minimalita afinního obalu)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V. Potom $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je nejmenší (ve smyslu inkluze) lineární varieta obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Z věty 6.8 víme, že každá lineární varieta obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ obsahuje také $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$. Jelikož zároveň z věty 6.7 plyne, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je lineární varieta, máme dokázáno, že je to nejmenší lineární varieta obsahující dané vektory. □

Poznámka 6.10. Podle věty 6.9 je řešením úlohy najít minimální lineární varietu W, která obsahuje vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, afinní obal $W = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\alpha$.

Příklad 6.11. Pomocí věty 6.9 si rozmyslete, jak vypadají afinní obaly jednoho, dvou nebo tří vektorů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Například $W = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\alpha$, kde $\vec{x}, \vec{y}$ a $\vec{z}$ neleží v jedné přímce, tvoří rovinu obsahující $\vec{x}, \vec{y}$ a $\vec{z}$.
Řešení: Jelikož jde o lineární varietu, musí W obsahovat spojnice $\vec{x}$ a $\vec{y}$, $\vec{x}$ a $\vec{z}$, $\vec{y}$ a $\vec{z}$. Dále musí W také obsahovat spojnice bodů ze tří výše uvedených spojnic. Tudíž W obsahuje rovinu, v níž leží trojúhelník s vrcholy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, viz obrázek 12. Jelikož rovina už je lineární varieta, našli jsme nejmenší lineární varietu obsahující $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, tedy jsme našli $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\alpha$.

Poslední otázka, která by nás mohla v souvislosti se vztahem mezi lineárními varietami a afinními obaly napadnout, zní: „Je každá lineární varieta afinním obalem nějakých vektorů?“ Odpověď zní: ANO, má-li V konečnou dimenzi, NE, je-li $\dim V = +\infty$. Ale musíme nejprve prostudovat vztah mezi varietami a posunutými podprostory, abychom odpověď mohli zdůvodnit.



Obrázek 12: Afinní obal tří vektorů v $\mathbb{R}^3$, které neleží v jedné přímce, je rovina obsahující trojúhelník s vrcholy v daných bodech.

6.3 Variety jako posunuté podprostory

Následující dvě věty vysvětlují, že variety nejsou ničím zcela novým, ale jde jen o posunuté podprostory.

Věta 6.12 (Posunutý podprostor je varieta)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $P \subset\subset V$ a $\vec{a} \in V$. Potom $\vec{a} + P$ je lineární varieta.*

Důkaz. Označme $W = \vec{a} + P$ a ověřme, že W má vlastnosti variety.

- Protože $\vec{0} \in P$, je $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \in W$. Tudíž $W \neq \emptyset$.
- Je-li $\vec{x}, \vec{y} \in W$, pak existují $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$ takové, že $\vec{x} = \vec{a} + \vec{p}_1$ a $\vec{y} = \vec{a} + \vec{p}_2$. Pro libovolné $\alpha \in T$ potom platí, že $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} = \vec{a} + \alpha\vec{p}_1 + (1-\alpha)\vec{p}_2 \in \vec{a} + P$. □

Poznámka 6.13. Speciálně je podle předchozí věty každý podprostor lineární varietou.

Poznámka 6.14. Množina řešení dané soustavy lineárních algebraických rovnic je lineární varieta. Z Frobeniovy věty víme, že má tvar $\vec{a} + S_0$, kde S_0 je množina řešení homogenní soustavy, tedy podprostor.

Věta 6.15 (Varieta je posunutý podprostor)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V. Pak existuje právě jeden $P \subset\subset V$ takový, že pro každé $\vec{a} \in W$ platí, že $W = \vec{a} + P$.*

Důkaz. Postup bude mít tři kroky.

- Existence podprostoru:
  Uvažujme libovolné $\vec{a} \in W$. Položme $P = W - \vec{a} = \{\vec{x} - \vec{a} \mid \vec{x} \in W\}$. Ukážeme, že $P \subset\subset V$.

(a) $P \neq \emptyset$, protože $\vec{0} = \vec{a} - \vec{a} \in P$.

(b) Je-li $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$ a $\alpha \in T$, pak existují $\vec{x}, \vec{y} \in W$ takové, že $\vec{p}_1 = \vec{x} - \vec{a}$, $\vec{p}_2 = \vec{y} - \vec{a}$. Potom máme:

$$\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (\alpha\vec{x} - \alpha\vec{a} + \vec{y}) - \vec{a} \in W - \vec{a},$$

kde jsme využili faktu, že $\alpha\vec{x} - \alpha\vec{a} + \vec{y}$ je afinní kombinace vektorů z variety, což je podle věty 6.8 opět vektor z variety.

- Libovolnost ve výběru vektoru $\vec{a} \in W$:
  Nechť $\vec{b} \in W$. Podle předchozího bodu existuje $\vec{p} \in P$ takový, že $\vec{b} = \vec{a} + \vec{p}$. Odtud máme $\vec{b} + P = \vec{a} + \vec{p} + P = \vec{a} + P = W$.

- Jednoznačnost podprostoru:
  Předpokládejme, že podprostor $Q \subset\subset V$ splňuje $W = \vec{a} + Q$. Zároveň víme, že $W = \vec{a} + P$. Odtud je zřejmé, že $Q = P$. □

Důsledek 6.16. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V. Pak W je podprostor V, právě když $\vec{0} \in W$.*

Definice 6.17. Podprostor z předchozí věty nazveme **zaměřením** variety W a značíme $\mathcal{Z}(W)$. Vektor $\vec{a}$ ve vyjádření $\vec{a} + \mathcal{Z}(W) = W$ nazýváme **vektorem posunutí**. Nenulové vektory ze $\mathcal{Z}(W)$ nazýváme **směrovými vektory** variety W. **Dimenzí variety** $\dim W$ nazveme $\dim \mathcal{Z}(W)$. Analogicky **kodimenzí variety** $\operatorname{codim} W$ nazveme $\operatorname{codim} \mathcal{Z}(W)$. Na základě dimenze zobecníme ve V pojmy bod, přímka, rovina, o kterých máme zatím názornou představu pouze v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$:

- Je-li $\dim W = 0$, pak W nazýváme **bodem**.
- Je-li $\dim W = 1$, pak W nazýváme **přímkou**.
- Je-li $\dim W = 2$, pak W nazýváme **rovinou**.
- Je-li $\operatorname{codim} W = 1$, pak W nazýváme **nadrovinou**.

Poznámka 6.18. V příkladu 6.4 jsme vyjmenovali všechny možné posunuté podprostory v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Podle věty 6.15 jde o úplný výčet lineárních variet v těchto prostorech.

Definice 6.19. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V. Nechť $\vec{a} \in W$ a nechť $\dim W = \ell \in \mathbb{N}$. Označme $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell)$ bázi $\mathcal{Z}(W)$, potom zřejmě

$$W = \left\{ \vec{x} \in V \,\middle|\, (\exists t_1, t_2, \ldots, t_\ell \in T) \left(\vec{x} = \vec{a} + \sum_{i=1}^{\ell} t_i \vec{x}_i \right) \right\}.$$

Rovnici $\vec{x} = \vec{a} + \sum_{i=1}^{\ell} t_i \vec{x}_i$ nazýváme **směrovou rovnicí** variety W. Je-li $\dim V$ konečná a rozepíšeme-li směrovou rovnici po souřadnicích ve zvolené bázi V, dostaneme **parametrické rovnice** variety W ve zvolené bázi.

Příklad 6.20. Nechť W je přímka v $\mathbb{R}^2$ se zaměřením $\mathcal{Z}(W) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$ a vektorem posunutí $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Ilustrujme pojmy z předchozí definice.

- Směrová rovnice W:
$$W \equiv \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$
- Parametrické rovnice W ve standardní bázi:
$$W \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & 1 \end{array},$$
kde $(\vec{x})_\mathcal{E} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Ačkoliv jsme zvyklí značit souřadnice vektoru $\vec{x}$ ve standardní bázi $x_1, x_2, x_3, x_4, \ \ldots,$ budeme při parametrickém zápisu lineárních variet ve standardní bázi dodržovat ustálené značení souřadnic pomocí $x, y, z, u, \ \ldots$

6.4 Vzájemná poloha variet a operace s nimi

Definice 6.21. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W_1, W_2 jsou lineární variety ve V. Nazveme je:

(a) **rovnoběžnými**, pokud $\mathcal{Z}(W_1) \subset \mathcal{Z}(W_2)$ nebo $\mathcal{Z}(W_2) \subset \mathcal{Z}(W_1)$,

(b) **mimoběžnými**, pokud nejsou rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = \emptyset$,

(c) **různoběžnými**, pokud nejsou rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

Věta 6.22 (Průnik variet)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W_1, W_2 jsou lineární variety ve V. Potom průnik $W_1 \cap W_2$ je buď $\emptyset$, nebo lineární varieta.*

Důkaz. Prázdný průnik jistě variety mít mohou. Například rovnoběžné a různé přímky v prostoru $\mathbb{R}^2$. Předpokládejme, že $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Ukážeme, že pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in W_1 \cap W_2$ a pro libovolné $\alpha \in T$ platí, že $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W_1 \cap W_2$. Jelikož $\vec{x}, \vec{y} \in W_1$, je také $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W_1$. Podobně $\vec{x}, \vec{y} \in W_2$, proto také $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W_2$. Odtud plyne, že $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W_1 \cap W_2$. □

Úkol 6.23. Dokažte tvrzení věty 6.22 zobecněné pro průnik libovolného počtu variet.

Úkol 6.24. * Rozmyslete si, jaké všechny možné situace nastávají v $\mathbb{R}^3$ a v $\mathbb{R}^4$ pro průnik a vzájemnou polohu:

- dvou přímek,
- přímky a roviny,
- dvou rovin.

Jaké situace se objevují v prostoru $\mathbb{R}^4$, zatímco v $\mathbb{R}^3$ nenastávají?

Definice 6.25. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W_1, W_2 jsou lineární variety ve V. Nechť $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Pak přímku W nazveme **příčkou** variet W_1 a W_2, pokud $W \cap W_1 \neq \emptyset$ a $W \cap W_2 \neq \emptyset$.

Věta 6.26 (LK variet)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W_1, W_2 jsou lineární variety ve V. Nechť $\alpha, \beta \in T$. Definujeme-li $\alpha W_1 + \beta W_2 := \{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \vec{x} \in W_1,\ \vec{y} \in W_2\}$, pak $\alpha W_1 + \beta W_2$ je také lineární varieta ve V a platí, že $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \alpha\mathcal{Z}(W_1) + \beta\mathcal{Z}(W_2)$.*

Důkaz. Nechť $\vec{a} \in W_1$ a $\vec{b} \in W_2$. Potom máme:

$$\begin{aligned} \alpha W_1 + \beta W_2 &= \{\alpha\vec{a} + \alpha\vec{x} + \beta\vec{b} + \beta\vec{y} \mid \vec{x} \in \mathcal{Z}(W_1), \vec{y} \in \mathcal{Z}(W_2)\} \\ &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \vec{x} \in \mathcal{Z}(W_1), \vec{y} \in \mathcal{Z}(W_2)\} \\ &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \alpha\mathcal{Z}(W_1) + \beta\mathcal{Z}(W_2). \end{aligned}$$

Není těžké si rozmyslet, že $\alpha\mathcal{Z}(W_1) + \beta\mathcal{Z}(W_2)$ je podprostor V. Odtud s využitím věty 6.12 plyne, že jde o varietu se zaměřením $\alpha\mathcal{Z}(W_1) + \beta\mathcal{Z}(W_2)$. □

Poznámka 6.27. Rozmysleme si, že pro zaměření variety $\alpha W_1 + \beta W_2$ platí:

(a) Pokud $\alpha = \beta = 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \{\vec{0}\}$.

(b) Pokud $\alpha = 0$ a $\beta \neq 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \mathcal{Z}(W_2)$.

(c) Pokud $\alpha \neq 0$ a $\beta = 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \mathcal{Z}(W_1)$.

(d) Pokud $\alpha \neq 0$ a $\beta \neq 0$, pak $\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)$.

Věta 6.28 (Obraz variety)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť W je lineární varieta v P. Potom $A(W)$ je lineární varieta v Q a platí, že $\mathcal{Z}(A(W)) = A(\mathcal{Z}(W))$.*

Důkaz. Nechť $\vec{a} \in W$. Pak $A(\vec{a} + \mathcal{Z}(W)) = A\vec{a} + A(\mathcal{Z}(W))$. Jelikož lineární obraz podprostoru je podprostor, vidíme, že jde o varietu se zaměřením $A(\mathcal{Z}(W))$. □

Věta 6.29 (Vzor variety)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť W je lineární varieta v Q. Potom $A^{-1}(W)$ je buď $\emptyset$, nebo lineární varieta v P. Je-li $A^{-1}(W) \neq \emptyset$, pak platí, že $\mathcal{Z}(A^{-1}(W)) = A^{-1}(\mathcal{Z}(W))$.*

Důkaz. $A^{-1}(W)$ může být prázdná množina. Například pro $A = \Theta$ a varietu W, která není podprostorem. Předpokládejme nyní, že $A^{-1}(W) \neq \emptyset$. Pro $\vec{a} \in A^{-1}(W)$ platí, že $A\vec{a} \in W$. Proto $W = A\vec{a} + \mathcal{Z}(W)$. Ukažme, že $A^{-1}(W) = \vec{a} + A^{-1}(\mathcal{Z}(W))$. Jelikož lineární vzor podprostoru je podprostor, bude jasné, že $A^{-1}(W)$ je lineární varieta se zaměřením $A^{-1}(\mathcal{Z}(W))$.

$$\vec{x} \in A^{-1}(W) \;\Leftrightarrow\; A\vec{x} \in W \;\Leftrightarrow\; A\vec{x} \in A\vec{a} + \mathcal{Z}(W) \;\Leftrightarrow\; A(\vec{x} - \vec{a}) \in \mathcal{Z}(W)$$

$$\Leftrightarrow\; \vec{x} - \vec{a} \in A^{-1}(\mathcal{Z}(W)) \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \in \vec{a} + A^{-1}(\mathcal{Z}(W)). \qquad \square$$

Příklad 6.30. POZOR! $A^{-1}(\vec{a} + \mathcal{Z}(W)) \neq A^{-1}(\vec{a}) + A^{-1}(\mathcal{Z}(W))$.

Nechť $\Theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ (nulový operátor) a $W = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$ (osa prvního a třetího kvadrantu). Poté $\Theta^{-1}(W) = \mathbb{R}^2$, ale

$$\Theta^{-1}(W) \neq \Theta^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) + \Theta^{-1}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda\right),$$

protože $\Theta^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \emptyset$. (A součet dvou množin, z nichž jedna je prázdná, nemá smysl.)

6.5 Variety jako afinní obaly

Vysvětleme vztah mezi lineárním a afinním obalem.

Věta 6.31 (Lineární obal a afinní obal)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V. Potom platí:*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha = \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_\lambda.$$

Důkaz.

- $[\ ]_\alpha \subset \vec{x}_1 + [\ ]_\lambda$: Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha$, tj. $\vec{x} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1$. Pak máme:
$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \alpha_i(\vec{x}_i - \vec{x}_1) \in \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_\lambda.$$

- $\vec{x}_1 + [\ ]_\lambda \subset [\ ]_\alpha$: Nechť $\vec{x} \in \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_\lambda$, tj. $\vec{x} = \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i(\vec{x}_i - \vec{x}_1)$. Potom platí:
$$\vec{x} = \left(1 - \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i\right)\vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i,$$
přičemž výraz vpravo je afinní kombinací vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$, protože součet koeficientů u jednotlivých vektorů v lineární kombinaci je $\left(1 - \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i\right) + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i = 1$. Tudíž $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha$. $\square$

Poznámka 6.32. V afinním obalu nezáleží na pořadí vektorů, proto samozřejmě platí pro libovolný index $i_0 \in \hat{\ell}$:

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha = \vec{x}_{i_0} + [\vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \ldots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_{i_0}]_\lambda.$$

Důsledek 6.33. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell \in V$ a nechť $i_0 \in \hat{\ell}$. Pak platí:*

- $\mathcal{Z}([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha) = [\vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \vec{x}_2 - \vec{x}_{i_0}, \ldots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_{i_0}]_\lambda.$
- $\dim[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha \leq \ell - 1.$

Definice 6.34. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V. Vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_\ell$ nazveme:

- **afinně nezávislé** (AN), pokud $\dim[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha = \ell - 1$,
- **afinně závislé** (AZ), pokud $\dim[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha < \ell - 1$.

Důsledek 6.35.

- *Jeden vektor je vždy AN.*
- *Pro $\ell \geq 2$ a $i_0 \in \hat{\ell}$ platí:*

  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ *jsou AN* $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \ldots, \vec{x}_{i_0-1} - \vec{x}_{i_0}, \vec{x}_{i_0+1} - \vec{x}_{i_0}, \ldots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_{i_0}$ *jsou LN.*

Věta 6.36 (Afinní závislost pro více vektorů)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V, kde $\ell \geq 2$. Poté vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ jsou AZ, právě když existuje $i_0 \in \hat{\ell}$ tak, že*

$$\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha.$$

Slovy: „Mezi alespoň dvěma AZ vektory existuje vektor, který je AK ostatních.“

Důkaz.

- ($\Rightarrow$): Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ jsou AZ, proto $\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1$ jsou LZ. Existují tudíž čísla $\alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ taková, že $\sum_{i=2}^{\ell} \alpha_i(\vec{x}_i - \vec{x}_1) = \vec{0}$ a zároveň existuje $i_0 \in \{2, \ldots, \ell\}$ tak, že $\alpha_{i_0} \neq 0$. Odtud dostáváme:

  $$-\alpha_{i_0}(\vec{x}_{i_0} - \vec{x}_1) = \sum_{i=2, i\neq i_0}^{\ell} \alpha_i(\vec{x}_i - \vec{x}_1).$$

  Proto platí:

  $$\vec{x}_{i_0} = -\sum_{i=2, i\neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} \vec{x}_i + \left(1 + \sum_{i=2, i\neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}}\right) \vec{x}_1.$$

Jelikož

$$-\sum_{i=2, i\neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} + \left(1 + \sum_{i=2, i\neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}}\right) = 1,$$

máme dokázáno, že $\vec{x}_{i_0}$ je AK vektorů $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \ldots, \vec{x}_\ell$.

- ($\Leftarrow$): $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha$, tedy existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, \ldots, \alpha_\ell$ taková, že $\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1, i\neq i_0}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\sum_{i=1, i\neq i_0}^{\ell} \alpha_i = 1$. Odtud dostáváme:

$$\vec{0} = \sum_{i=1, i\neq i_0}^{\ell} \alpha_i (\vec{x}_i - \vec{x}_{i_0}).$$

  Jelikož jde o netriviální LK vektorů $\vec{x}_1 - \vec{x}_{i_0}, \ldots, \vec{x}_{i_0-1} - \vec{x}_{i_0}, \vec{x}_{i_0+1} - \vec{x}_{i_0}, \ldots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_{i_0}$, jsou tyto LZ. To znamená, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ jsou AZ. $\square$

Poznámka 6.37. Nabádáme čtenáře, aby si rozmyslel, že AN vektory v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ vypadají následovně:

- Jeden vektor je vždy AN.
- Dva vektory $\vec{x}, \vec{y}$ jsou AN $\Leftrightarrow$ $\vec{x} \neq \vec{y}$.
- Tři vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jsou AN $\Leftrightarrow$ $\vec{x}, \vec{y}$ a $\vec{z}$ neleží v jedné přímce.
- Čtyři vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}$ jsou v $\mathbb{R}^2$ vždy AZ.
  Čtyři vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}$ jsou v $\mathbb{R}^3$ AN $\Leftrightarrow$ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}$ neleží v jedné rovině.

Nyní už si můžeme posvítit na otázku, zda je každá lineární varieta afinním obalem.

Věta 6.38 (Varieta konečné dimenze je afinní obal)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V splňující* $\dim W = \ell - 1$, $\ell \in \mathbb{N}$. *Pak existují vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_\ell$ takové, že*

$$W = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_\ell]_\alpha.$$

Důkaz. Z věty 6.15 plyne, že existuje podprostor $\mathcal{Z}(W)$ dimenze $\ell - 1$ takový, že $W = \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$, kde $\vec{a} \in W$. Buď je $\mathcal{Z}(W) = \{\vec{0}\}$, potom $W = [\vec{a}]_\alpha$, nebo existuje báze $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{\ell-1})$ podprostoru $\mathcal{Z}(W)$. Poté je podle věty 6.31 splněno:

$$W = \vec{a} + [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{\ell-1}]_\lambda = [\vec{a}, \vec{a} + \vec{x}_1, \vec{a} + \vec{x}_2, \ldots, \vec{a} + \vec{x}_{\ell-1}]_\alpha,$$

W je tudíž afinním obalem ℓ vektorů. $\square$

Věta 6.39 (Varieta nekonečné dimenze není afinní obal)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a W je lineární varieta ve V s* $\dim W = +\infty$. *Pak W není rovna žádnému afinnímu obalu.*

Důkaz. Podle důsledku 6.33 je každý afinní obal varietou konečné dimenze. Odtud tvrzení plyne. $\square$

6.6 Variety jako průniky nadrovin

Věta 6.40 (Nadrovina)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\varphi \in V^\#$, $\varphi \neq \Theta$. Nechť $\alpha \in T$. Potom množina*

$$\{\vec{x} \in V \mid \varphi(\vec{x}) = \alpha\}$$

je nadrovina ve V.

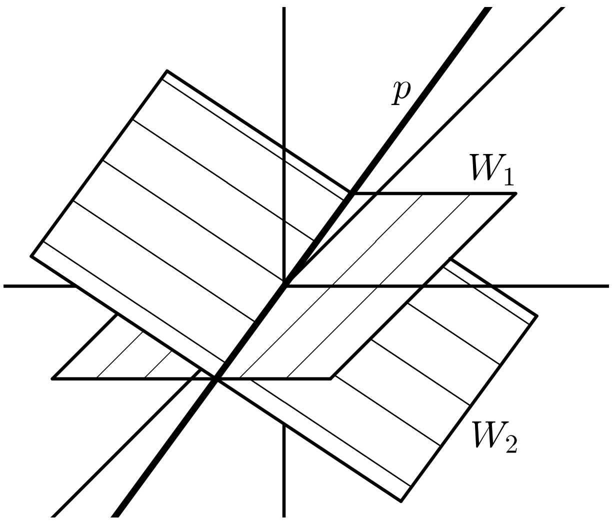
Důkaz. Protože $\varphi \neq \Theta$, platí, že $\varphi(V) = T$. Existuje tudíž $\vec{a} \in V$ tak, že $\varphi(\vec{a}) = \alpha$. Potom platí, že $\varphi^{-1}(\alpha) = \vec{a} + \ker \varphi$, což je zjevně varieta kodimenze jedna, neboť podle věty 4.52 je $\operatorname{codim} \ker \varphi = h(\varphi) = 1$. □

Následující věta osvětlí, jaký je vztah mezi nadrovinami a varietami konečné kodimenze. Viz také obrázek 13.

Věta 6.41 (Varieta jako průnik nadrovin)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť W je lineární varieta ve V, $\operatorname{codim} W = \ell \in \mathbb{N}$. Potom existují LN lineární funkcionály $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\ell$ a čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell \in T$ tak, že*

$$W = \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}.$$

Slovy: „Každá lineární varieta o kodimenzi ℓ je průnikem ℓ nadrovin.“



Obrázek 13: Přímka p v $\mathbb{R}^3$ – varieta kodimenze dva – jako průnik dvou (nad)rovin W_1 a W_2.

Důkaz. Podle věty 6.15 lze varietu psát jako $W = \vec{a} + P$, kde $P \subset\subset V$ a $\vec{a}$ je libovolný bod z W. Podle předpokladu existuje $Q \subset\subset V$, doplněk P do V, splňující $\dim Q = \ell$. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell)$ bázi Q. Definujme pro každé $i \in \hat{\ell}$:

$$\varphi_i = x_i^\# A_Q \quad \text{a} \quad \alpha_i = \varphi_i(\vec{a}),$$

přičemž A_Q je projektor na Q podle P. Pak se LN vektorů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\ell$ ukáže analogicky jako ve větě 4.58 a zbývá ukázat, že platí:

$$\vec{a} + P = \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}.$$

Je třeba ověřit dvě inkluze:

- $\vec{a} + P \subset \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}$: Nechť $\vec{x} = \vec{a} + \vec{p}$, kde $\vec{p} \in P$. Protože $A_Q(P) = \{\vec{0}\}$, platí pro každé $i \in \widehat{\ell}$, že $\varphi_i(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{a}) + \varphi_i(\vec{p}) = \alpha_i + 0 = \alpha_i$. Tedy $\vec{x} \in \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}$.

- $\vec{a} + P \supset \bigcap_{i=1}^{\ell} \{\vec{x} \in V \mid \varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i\}$: Nechť pro každé $i \in \widehat{\ell}$ platí, že $\varphi_i(\vec{x}) = \alpha_i$, pak $\varphi_i(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{a})$, tudíž $\varphi_i(\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Označme $\vec{z} = \vec{x} - \vec{a}$. Jelikož $\vec{z} \in V$, existuje právě jedno $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$ tak, že $\vec{z} = \vec{p} + \vec{q}$. Označme $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\ell$ souřadnice $\vec{q}$ v bázi $\mathcal{X}$. Dostáváme $\varphi_i(\vec{z}) = \varphi_i(\vec{p}) + \varphi_i(\vec{q}) = 0 + \beta_i$ pro každé $i \in \widehat{\ell}$. Proto $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_\ell = 0$, tedy $\vec{q} = \vec{0}$ a $\vec{z} = \vec{p} \in P$, neboli $\vec{x} \in \vec{a} + P$. □

Definice 6.42. Rovnice

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(\vec{x}) & = & \alpha_1 \\ \varphi_2(\vec{x}) & = & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_\ell(\vec{x}) & = & \alpha_\ell \end{array}$$

z věty 6.41 nazýváme **vektorovými rovnicemi** variety W. Navíc, je-li $\dim V = n \in \mathbb{N}$ a je-li $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ báze V, potom pro libovolný vektor $\vec{x} \in W$ splňují souřadnice $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ **neparametrické rovnice** variety W v bázi $\mathcal{X}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \beta_1\varphi_1(\vec{x}_1) & + & \beta_2\varphi_1(\vec{x}_2) & + & \ldots & + & \beta_n\varphi_1(\vec{x}_n) & = & \alpha_1 \\ \beta_1\varphi_2(\vec{x}_1) & + & \beta_2\varphi_2(\vec{x}_2) & + & \ldots & + & \beta_n\varphi_2(\vec{x}_n) & = & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_1\varphi_\ell(\vec{x}_1) & + & \beta_2\varphi_\ell(\vec{x}_2) & + & \ldots & + & \beta_n\varphi_\ell(\vec{x}_n) & = & \alpha_\ell. \end{array}$$

Nadroviny, jejichž průnik tvoří danou varietu, nejsou určeny jednoznačně. Viz následující příklad.

Příklad 6.43. Zapište přímku W s vektorem posunutí $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a zaměřením $\mathcal{Z}(W) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$ dvěma různými způsoby jako průnik nadrovin.

Řešení: Užijeme konstrukci z důkazu věty 6.41.

1. Volme $Q = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$ s bází $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = (\vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Položme $\varphi_1 = e_2^\# A_Q$ a $\varphi_2 = e_3^\# A_Q$. Poté platí:

$$\varphi_1(\vec{x}) = \varphi_1 \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = y = \varphi_1(\vec{a}) = \varphi_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1,$$

$$\varphi_2(\vec{x}) = \varphi_2 \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = z = \varphi_1(\vec{a}) = \varphi_2 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1.$$

Neparametrické rovnice W ve standardní bázi mají proto tvar:

$$y = 1 \quad \text{a} \quad z = 1.$$

2. Necháme doplněk Q stejný, volíme pouze jinou jeho bázi $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Položme $\varphi_1 = x_1^\# A_Q$ a $\varphi_2 = x_2^\# A_Q$, pak platí:

$$\varphi_1(\vec{x}) = \varphi_1 \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{y+z}{2} = \varphi_1(\vec{a}) = \varphi_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1,$$

$$\varphi_2(\vec{x}) = \varphi_2 \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{y-z}{2} = \varphi_1(\vec{a}) = \varphi_2 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0.$$

Neparametrické rovnice W ve standardní bázi jsou tentokrát:

$$\frac{y+z}{2} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{y-z}{2} = 0.$$