5 Frobeniova věta

V této kapitole prozkoumáme vztah mezi lineárními zobrazeními a maticemi. Zjistíme, že na prostorech konečné dimenze lze tvrdit: „Lineární zobrazení a matice jedno jest.“ Nejprve zavedeme novou operaci s maticemi, a sice násobení. Umožní nám zapsat soustavu LAR jednodušším způsobem: maticovým zápisem. Poté definujeme také pro matice pojem hodnost, s jehož pomocí zformulujeme Frobeniovu větu. Tím završíme problematiku řešení soustav LAR. Jelikož je Frobeniova věta jednou z nejdůležitějších vět celé lineární algebry, pojmenovali jsme pátou kapitolu právě po ní. Ferdinand Georg Frobenius vyslovil větu až na počátku 20. století. Křivolaké cestě k řešení soustav LAR je věnován dodatek skript pro letní semestr Lineární algebra 2.

5.1 Matice a lineární zobrazení

Již známe $T^{m,n}$ vektorový prostor matic s prvky z tělesa T o m řádcích a n sloupcích, říkáme, že jsou typu $m \times n$. Víme, že sčítání matic a násobení matice číslem z T je definováno po prvcích. Nyní zavedeme další operaci – násobení matic.

Definice 5.1. Nechť T je těleso. Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a $\mathbb{B} \in T^{n,p}$. Pak **součinem** $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ nazveme matici typu $m \times p$, značíme ji $\mathbb{AB}$ nebo $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$, definovanou

$$[\mathbb{AB}]_{ij} := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj} \qquad \text{pro každé } i \in \widehat{m},\ j \in \widehat{p}.$$

Příklad 5.2. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Potom $\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{BA} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 17 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Věta 5.3 (Vlastnosti násobení matic)**.** *Nechť T je těleso. Násobení matic má následující vlastnosti:*

1. *Je asociativní, tj. pro $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\mathbb{B} \in T^{n,p}$ a $\mathbb{C} \in T^{p,s}$ platí, že $(\mathbb{AB})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{BC})$.*
2. *Je distributivní vůči sčítání, tj. pro $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a $\mathbb{B}, \mathbb{C} \in T^{n,p}$ platí, že $\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{AB} + \mathbb{AC}$.*
3. *Není obecně komutativní, ani když násobíme čtvercové matice, tj. existují čtvercové matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ s prvky z T takové, že $\mathbb{AB} \neq \mathbb{BA}$.*
4. *Je-li $\mathbb{A}$ typu $n \times n$ (nazýváme ji **čtvercovou maticí řádu** n)* [33] *a je-li $\mathbb{I}$ **jednotková**, tj. $\mathbb{I}_{ij} := \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$, potom $\mathbb{AI} = \mathbb{IA} = \mathbb{A}$.* [34]

[33]V literatuře narazíme i na termín čtvercová matice stupně n.

[34]Často se jednotková matice značí též $\mathbb{E}$ nebo **1**.

Důkaz.

1. Zkontrolujme nejprve podle definice násobení matic rozměry matic. Matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je typu $m \times p$. Proto matice $(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}$ je typu $m \times s$. Jelikož $\mathbb{B}\mathbb{C}$ je typu $n \times s$, je $\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$ také typu $m \times s$.

   Nyní stačí ukázat, že pro každé $i \in \widehat{m}$ a $j \in \widehat{s}$ platí, že $[(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}]_{ij} = [\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})]_{ij}$. Podle definice násobení matic a prací se sumami dostaneme následující rovnosti:

$$[(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} [\mathbb{A}\mathbb{B}]_{ik}\mathbb{C}_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{A}_{i\ell}\mathbb{B}_{\ell k} \right) \mathbb{C}_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{A}_{i\ell}\mathbb{B}_{\ell k}\mathbb{C}_{kj} \right)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} \mathbb{A}_{i\ell}\mathbb{B}_{\ell k}\mathbb{C}_{kj} \right) = \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{A}_{i\ell} \sum_{k=1}^{p} \mathbb{B}_{\ell k}\mathbb{C}_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{A}_{i\ell}[\mathbb{B}\mathbb{C}]_{\ell j} = [\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})]_{ij}.$$

2. Zkontrolujme nejprve podle definice násobení matic rozměry matic. Matice $\mathbb{B} + \mathbb{C}$ je typu $n \times p$, proto $\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C})$ je typu $m \times p$. Matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ i $\mathbb{A}\mathbb{C}$ jsou typu $m \times p$, proto jejich součet $\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}$ je také typu $m \times p$.

   Nyní stačí ověřit, že pro každé $i \in \widehat{m}$ a $j \in \widehat{p}$ platí, že $[\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C})]_{ij} = [\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}]_{ij}$. Podle definice násobení a sčítání matic a prací se sumami dostaneme následující rovnosti:

$$[\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C})]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}[\mathbb{B} + \mathbb{C}]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}(\mathbb{B}_{kj} + \mathbb{C}_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{C}_{kj} = [\mathbb{A}\mathbb{B}]_{ij} + [\mathbb{A}\mathbb{C}]_{ij} = [\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}]_{ij}.$$

3. Je-li $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ a $\mathbb{B}$ typu $n \times p$, pak $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je typu $m \times p$. Aby $\mathbb{B}\mathbb{A}$ existovala, musí být $m = p$, rozměr $\mathbb{B}\mathbb{A}$ je potom $n \times n$. Aby $\mathbb{A}\mathbb{B}$ a $\mathbb{B}\mathbb{A}$ měly stejný rozměr, musí být tudíž $m = p = n$, neboli $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ musejí být čtvercové stejného řádu.

   Ani tehdy ale rozhodně nemusí rovnost platit. Například pro $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je $\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Tento bod ponecháme k ověření čtenáři. □

Poznámka 5.4. Při znalosti násobení matic lze soustavu m lineárních algebraických rovnic pro n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

zapsat **maticovým (vektorovým) zápisem** jako $\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definice 5.5. Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T, přičemž $n, m \in \mathbb{N}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ a nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Pak matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ typu $m \times n$, jejíž j-tý sloupec je definován jako $[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} := (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$, nazýváme **maticí zobrazení** A v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

Je-li $A \in \mathcal{L}(P_n)$ a $\mathcal{X}$ je báze P_n, pak místo ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$ píšeme obvykle ${}^{\mathcal{X}}A$.

Poznámka 5.6. Označme $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$ bázi $\mathcal{Y}$, potom lze popsat prvky matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ pomocí souřadnicových funkcionálů v bázi $\mathcal{Y}$. Pro každé $i \in \widehat{m}$ a $j \in \widehat{n}$ platí:

$$[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{ij} = y_i^{\#}(A\vec{x}_j).$$

Poznámka 5.7. Chceme-li zapsat ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ rovnou jako matici, můžeme psát:

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \left((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} \ (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} \ \dots \ (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}} \right).$$

Věta 5.8 (Vlastnosti matice zobrazení). *Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť dále $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Nechť $\alpha \in T$ a $A, B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Pak platí:*

1. ${}^{\mathcal{X}}(A + B)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$,
2. ${}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}} = \alpha\, {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

Důkaz.

1. Porovnáme j-té sloupce matic pro každé $j \in \widehat{n}$:

$$\begin{aligned}
[{}^{\mathcal{X}}(A + B)^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} &= ((A + B)\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} && \text{(definice matice zobrazení)} \\
&= (A\vec{x}_j + B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} && \text{(definice součtu zobrazení)} \\
&= (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} + (B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} && \text{(aditivita souřadnicového izormorfismu)} \\
&= [{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} + [{}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} && \text{(definice matice zobrazení)} \\
&= [{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} && \text{(definice součtu matic).}
\end{aligned}$$

2. Postupujeme analogicky jako v prvním bodě. Porovnáme j-té sloupce matic pro každé $j \in \widehat{n}$:

$$[{}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = ((\alpha A)\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = (\alpha(A\vec{x}_j))_{\mathcal{Y}} = \alpha(A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = \alpha[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = [\alpha\, {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j}. \qquad \square$$

Věta 5.9 (Výpočet obrazu vektoru)**.** *Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Potom pro každé $\vec{x} \in P_n$ platí:*

$$(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}.$$

Důkaz. $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}}$ je vektor z T^m a ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ je součin matic typu $m\times n$ a $n\times 1$, jde tedy o matici z $T^{m,1} = T^m$. Rozměry jsou tudíž shodné. Označme $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ bázi $\mathcal{X}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Poté máme: $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \left(A\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j\right)\right)_{\mathcal{Y}} = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j A\vec{x}_j\right)_{\mathcal{Y}} = \sum_{j=1}^n \alpha_j (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$. Ve druhé rovnosti jsme využili linearity A a ve třetí rovnosti linearity souřadnicového izomorfismu v bázi $\mathcal{Y}$. Nyní už stačí si rozmyslet podle definice násobení matic, že platí:

$$\alpha_1(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} + \alpha_2(A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} + \cdots + \alpha_n(A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}} = \left((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}\ (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}\ \ldots\ (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}\right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}.$$

□

Příklad 5.10. Je-li speciálně $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$, pak podle věty 5.9 platí:

$$A\vec{x} = {}^{\mathcal{E}_n}A^{\mathcal{E}_m}\vec{x}.$$

Neboli působení takového zobrazení na vektor odpovídá násobení vektoru odpovídající maticí ve standardních bázích.

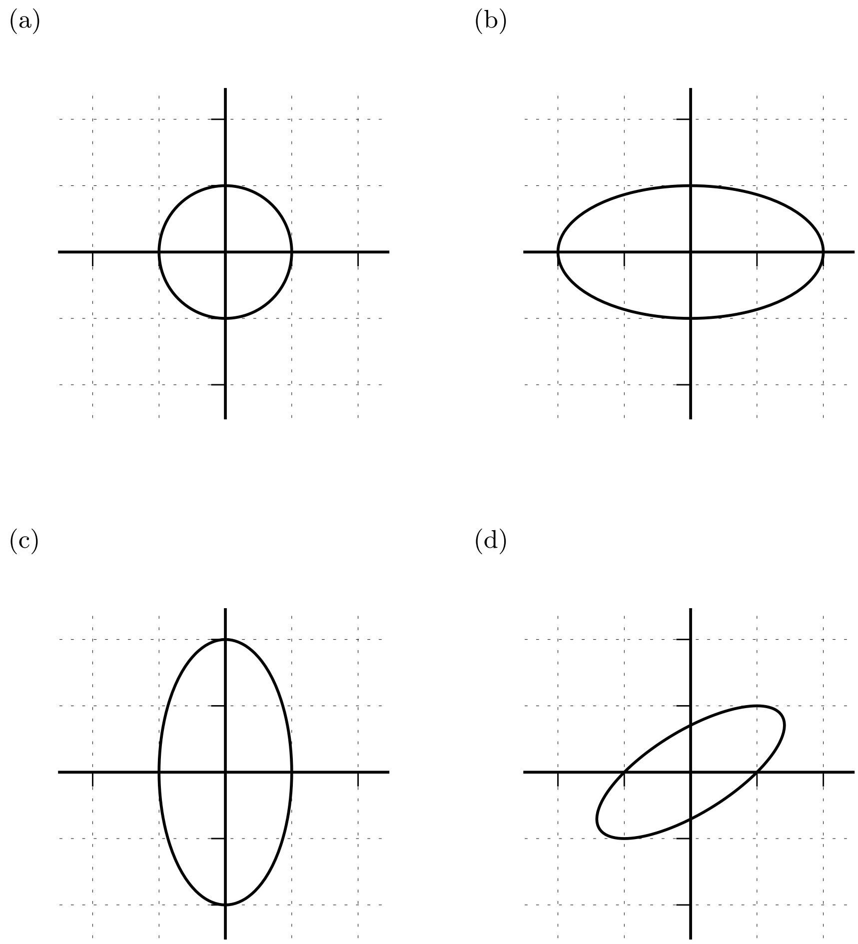
- Rozmyslete si, jakými maticemi jsou určeny operátory na $\mathbb{R}^2$ z příkladu 4.4.
- Dále si rozmyslete, jak jednotlivé operátory působí na různé útvary v $\mathbb{R}^2$. Na obrázku 10 je vyznačeno, jak vypadají obrazy jednotkové kružnice při zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, má-li $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}_2}A$ podobu:

$$(a)\ \mathbb{A} = \mathbb{I}, \quad (b)\ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c)\ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (d)\ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úkol 5.11. Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T, přičemž $n, m \in \mathbb{N}_0$. Určete $\dim \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. (Jako nápovědu uvádíme, že by se čtenáři mohl k řešení úkolu hodit pojem matice v bázích.)

Poznámka 5.12. Věta 5.9 o výpočtu obrazu vektoru umožňuje přeformulovat úlohu řešit rovnici $A\vec{x} = \vec{b}$ na řešení soustavy LAR (samozřejmě pouze na prostorech konečné dimenze).

Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ a nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Dále nechť $\vec{b} \in A(P_n)$ a nechť je zadána matice zobrazení ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$. Z věty 4.36 o řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$ víme, že řešení $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $\vec{a} + \ker A$, kde $\vec{a}$ je partikulární řešení.



Obrázek 10: Obrazy jednotkové kružnice při působení různých lineárních operátorů na $\mathbb{R}^2$.

(a) $\ker A$: Z hodnosti $h(A)$, kterou umíme z matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ určit, spočítáme defekt $d(A)$ a poté najdeme bázi jádra následujícím způsobem:

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = (\vec{0})_{\mathcal{Y}}.$$

Jelikož $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, stačí najít $d(A)$ lineárně nezávislých řešení homogenní soustavy s maticí ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$. Tím získáme souřadnice bazických vektorů z jádra v bázi $\mathcal{X}$.

(b) Partikulární řešení $\vec{a}$:

$$A\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (A\vec{a})_{\mathcal{Y}} = (\vec{b})_{\mathcal{Y}}.$$

Jelikož $(A\vec{a})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{a})_{\mathcal{X}}$, najdeme $(\vec{a})_{\mathcal{X}}$ tak, že určíme jedno řešení soustavy LAR s maticí ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ a pravou stranou $(\vec{b})_{\mathcal{Y}}$.

Příklad 5.13. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ má matici v bázi $\mathcal{X}$ rovnu ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Najděte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) $\ker A$: Z matice ${}^{\mathcal{X}}A$ vidíme, že

$$\left(A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \left(A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \left(A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Tudíž

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$h(A) = \dim A(\mathbb{R}^3) = \dim A\left(\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda\right) = \dim \left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda = 2,$$

proto $d(A) = 1$. Dále

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A\vec{x})_{\mathcal{X}} = (\vec{0})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Jelikož $(A\vec{x})_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}A(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, stačí najít jedno LN řešení homogenní soustavy s maticí ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Takovým řešením je například $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Tudíž $\ker A = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

(b) Partikulární řešení $\vec{a}$: Nejprve si uvědomíme platnost ekvivalence:

$$A\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow (A\vec{a})_{\mathcal{X}} = \left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Jelikož $(A\vec{a})_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}A(\vec{a})_{\mathcal{X}}$, najdeme $(\vec{a})_{\mathcal{X}}$ tak, že určíme jedno řešení soustavy LAR s maticí ${}^{\mathcal{X}}A$ a pravou stranou $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Řešením je například $(\vec{a})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, tedy $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Závěr: $A^{-1}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

V historii se objevilo více způsobů definice násobení matic, ale díky souvislosti se skládáním zobrazení, kterou ukáže následující věta, zvítězila definice dnešní.

Věta 5.14 (Matice složeného zobrazení)**.** *Nechť P_n, Q_m, V_s jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(Q_m, V_s)$ a $B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n, $\mathcal{Y}$ je báze Q_m a $\mathcal{Z}$ je báze V_s. Potom platí:*

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

Důkaz. Zkontrolujme nejprve rozměry matic. ${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}}$ je typu $s \times n$. ${}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}$ je typu $s \times m$ a ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$ je typu $m \times n$, proto jejich součin je rovněž typu $s \times n$.

Ověřme rovnost j-tých sloupců pro každé $j \in \hat{n}$.

$$[{}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}}]_{\bullet j} = ((AB)\vec{x}_j)_{\mathcal{Z}} = (A(B\vec{x}_j))_{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}(B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = [{}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}\,{}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j}.$$

Předposlední rovnost plyne z věty 5.9 o výpočtu obrazu vektoru pomocí matice v bázích. Uvědomíme-li si, že $(B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$ je j-tý sloupec matice ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$, plyne poslední rovnost z definice násobení matic (j-tý sloupec součinu dvou matic se totiž získá jako součin první matice s j-tým sloupcem druhé matice). □

Poznámka 5.15. Věta 5.14 o matici složeného zobrazení umožňuje pomocí „vnášení identity“ mechanické převody matice zobrazení v nějakých bázích na matici téhož zobrazení v jiných bázích.

Zaveďme nejprve pojem matice přechodu, s jeho použitím pak představíme metodu vnášení identity.

Definice 5.16. Nechť $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T. Pak **maticí přechodu** od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$ nazveme matici ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$.

Název matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$ plyne ze vztahu:

$$(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}},$$

který umožňuje pro každé $\vec{x} \in V_n$ vypočítat jeho souřadnice v bázi $\mathcal{Y}$ pomocí matice přechodu ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$ a pomocí jeho souřadnic v bázi $\mathcal{X}$.

Příklad 5.17. Nechť jsou dány báze $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right), \ \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\right).$$

Nechť dále $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ má matici v bázi $\mathcal{X}$ rovnu ${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\4 & -2 & 0\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Najděte ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$.

Řešení: Pro identický operátor I na $\mathbb{R}^3$ jistě platí, že $B = IB = BI$.

$${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}(IB)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B.$$

Jelikož ${}^{\mathcal{X}}B$ známe, zbývá určit matici přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$:

$${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} = ((\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}\ (\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}\ (\vec{x}_3)_{\mathcal{Y}}) = \left(\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{Y}} \left(\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{Y}} \left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{Y}}\right) = \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\0 & 1 & 0\\-1 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Závěr: ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\0 & 1 & 0\\-1 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\4 & -2 & 0\\2 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\4 & -2 & 0\\6 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

Úlohu lze řešit i bez využití věty 5.14. Čtenář jistě sám vymyslí takový postup.

5.2 Hodnost matice

Zatím známe pojem hodnost lineárního zobrazení. Nyní si zavedeme hodnost matice a prozkoumáme její vlastnosti a souvislost s hodností lineárního zobrazení. T bude všude značit číselné těleso, m, n, p přirozená čísla.

Definice 5.18. Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. **Hodnost matice** $h(\mathbb{A})$ je definována jako

$$h(\mathbb{A}) := \dim[\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_\lambda.$$

Slovy: „$h(\mathbb{A})$ je počet lineárně nezávislých sloupců matice $\mathbb{A}$.“

Vyšetřování hodnosti matice je tudíž podobné vyšetřování LZ a LN vektorů. Matici upravíme do horního stupňovitého tvaru (z definice je jasné, že ekvivalentní řádkové úpravy hodnost matice nemění). Pak můžeme určit hodnost matice jako počet hlavních sloupců.

Příklad 5.19. Spočtěte hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V horním stupňovitém tvaru jsou první, druhý a čtvrtý sloupec hlavní, tedy $h(\mathbb{A}) = 3$.

Úkol 5.20. Rozmyslete si, že jsou-li $\tilde{T}, T$ tělesa a $\tilde{T} \subset T$ a je-li $\mathbb{A} \in \tilde{T}^{m,n}$ (tudíž také $\mathbb{A} \in T^{m,n}$), potom pro hodnost $h(\mathbb{A})$ platí, že vyjde stejná, ať ji počítáme nad tělesem $\tilde{T}$, či T. Využijte faktu, že převod na horní stupňovitý tvar ekvivalentními řádkovými úpravami nemění hodnost matice.

5.3 Vztah hodnosti matice a zobrazení

Ukažme, jak úzce spolu hodnost matice a hodnost lineárního zobrazení souvisí.

Věta 5.21 (Hodnost zobrazení a hodnost matice)**.** *Nechť P_n a Q_m jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$, $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Pak*

$$h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}).$$

Důkaz. Stačí, abychom rozepsali, co je $h(A)$ a co je $h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$.

$$h(A) = \dim A(P_n) = \dim A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = \dim[A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda = \dim V,$$

kde $V = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$.

$$h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}) = \dim[(A\vec{x}_1)_\mathcal{Y}, (A\vec{x}_2)_\mathcal{Y}, \dots, (A\vec{x}_n)_\mathcal{Y}]_\lambda = \dim W,$$

přičemž $W = [(A\vec{x}_1)_\mathcal{Y}, (A\vec{x}_2)_\mathcal{Y}, \dots, (A\vec{x}_n)_\mathcal{Y}]_\lambda$.

Je snadné nahlédnout, že souřadnicový izomorfismus $(.)_\mathcal{Y} \colon Q_m \to T^m$ zobrazuje V na W, proto W je izomorfní s V. Z věty 4.43 víme, že pro prostory W, V s konečnou dimenzí platí, že $W \cong V \Leftrightarrow \dim V = \dim W$. □

Poznámka 5.22. Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$ takové, že $A\vec{x} = \mathbb{A}\vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in T^n$. Poté zřejmě platí, že $\mathbb{A}$ je rovna matici A ve standardních bázích, tj. $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}_n}A^{\mathcal{E}_m}$, tedy podle věty 5.21 je $h(A) = h(\mathbb{A})$.

5.4 Regulární a singulární matice

Nyní zavedeme pojem regulární matice, který se bude opakovaně objevovat i v letním semestru. Postupně totiž vyslovíme tvrzení, která budou regulární matice charakterizovat pomocí různých vlastností: jednoznačnost řešení příslušné soustavy LAR, existence inverzní matice, nenulový determinant, nenulová vlastní čísla atd.

Definice 5.23. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak $\mathbb{A}$ se nazývá **regulární**, pokud $h(\mathbb{A}) = n$. V opačném případě se $\mathbb{A}$ nazývá **singulární**.

Věta 5.24 (Izomorfismus a regulární matice)**.** *Nechť P_n a Q_n jsou vektorové prostory nad stejným tělesem a $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$. Dále nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ báze Q_n. Potom A je izomorfismus právě tehdy, když ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ je regulární matice.*

Důkaz. Pro $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$ z věty 4.45 o jednodušším ověření izomorfnosti zobrazení víme, že A je „na“ Q_n (tj. $h(A) = n$) právě tehdy, když A je izomorfismus. Poté už stačí použít větu 5.21, která dává rovnost $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$. □

Z věty 5.24 plyne souvislost pojmů regulární operátor a regulární matice:

Důsledek 5.25 (Regulární operátor a regulární matice)**.** *Nechť P_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P_n)$. Nechť dále $\mathcal{X}$ je báze P_n. Pak A je regulární operátor právě tehdy, když ${}^{\mathcal{X}}A$ je regulární matice.*

5.5 Frobeniova věta

Již na začátku semestru jsme se naučili zjistit, zda má soustava LAR řešení, zda má více řešení, a jedno řešení umíme najít. Mnozí umějí najít i všechna řešení soustavy LAR s pravou stranou – za neznámé odpovídající vedlejším sloupcům po převedení matice soustavy do horního stupňovitého tvaru volí libovolně a zbylé neznámé dopočítají. Frobeniova věta zformuluje elegantně pomocí nového pojmu hodnost matice podmínku řešitelnosti soustavy LAR s pravou stranou a prozradí počet LN řešení homogenní soustavy. [35] Dále popíše tvar množiny všech řešení právě pomocí řešení homogenní soustavy.

Obvykle tečku $\cdot$ při násobení matic vynecháváme. Ve Frobeniově větě a jejím důkazu nikoliv, protože tak zdůrazňujeme rozdíl mezi součinem matic $\mathbb{A} \cdot \vec{x}$ a působením zobrazení na vektor $A\vec{x}$.

Věta 5.26 (Frobeniova)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a $\vec{b} \in T^m$. Potom pro soustavu LAR*

$$\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{4}$$

platí:

1. *Soustava (4) má řešení právě tehdy, když $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$, tj. právě tehdy, když hodnost matice soustavy je stejná jako hodnost rozšířené matice soustavy.*

2. *Označme S_0 množinu řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbb{A}$, tj.*

   $$S_0 = \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}.$$

   Pak $S_0 \subset\subset T^n$ a $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A})$.

3. *Nechť $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$. Potom množina všech řešení soustavy (4), tj.*

   $$S = \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}\},$$

   má tvar $S = \vec{a} + S_0$, kde $\mathbb{A} \cdot \vec{a} = \vec{b}$. Vektor $\vec{a}$ nazýváme ***partikulárním řešením****.*

Důkaz.

1. Tvrzení plyne z následující série ekvivalencí:

   $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b}) \Leftrightarrow$

[35] Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917), německý matematik. Jak se dozvíte v dodatku skript Lineární algebra 2, větu o řešení soustav LAR dokázal Frobenius v dnešním znění roku 1905. Ovšem její jednotlivé body byly známy, byť třeba v trochu jiné podobě, již dříve. Věta by se tedy také mohla jmenovat Dodgsonova, Kroneckerova nebo Capelliova.

$\Leftrightarrow$ $\dim[\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_\lambda = \dim[\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\bullet n}, \vec{b}]_\lambda$
(vlastnost podprostorů:
je-li $P \subset\subset Q$ a $\dim Q < +\infty$, pak $\dim P = \dim Q \Leftrightarrow P = Q$)

$\Leftrightarrow$ $[\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_\lambda = [\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\bullet n}, \vec{b}]_\lambda$
(vlastnost lineárních obalů)

$\Leftrightarrow$ $\vec{b} \in [\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_\lambda$
(definice lineárního obalu)

$\Leftrightarrow$ existuje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ tak, že $\alpha_1 \mathbb{A}_{\bullet 1} + \alpha_2 \mathbb{A}_{\bullet 2} + \cdots + \alpha_n \mathbb{A}_{\bullet n} = \vec{b}$
(definice maticového násobení)

$\Leftrightarrow$ existuje $\vec{x} \in T^n$ takové, že $\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$\Leftrightarrow$ soustava (4) má řešení.

2. Nechť $A \colon T^n \to T^m$ je lineární zobrazení definované pro každé $\vec{x} \in T^n$ jako $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$. Poté pro S_0 platí:

$$S_0 = \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in T^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\} = \ker A.$$

Z teorie lineárních zobrazení víme, že jádro lineárního zobrazení tvoří podprostor, tj. $S_0 \subset\subset T^n$, a z 2. věty o dimenzi víme, že $\dim S_0 = d(A) = n - h(A) = n - h(\mathbb{A})$, kde poslední rovnost plyne z poznámky 5.22.

3. Uvažujme zobrazení A z předchozího bodu. Jelikož z předpokladu $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$ plyne, že $\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ má řešení, platí také, že $A\vec{x} = \vec{b}$ má řešení. Z věty 4.36 o řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$ víme, že množina všech řešení $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $\vec{a} + \ker A$, kde $\vec{b} = A\vec{a}$. Proto $S = \vec{a} + S_0$, kde $\vec{b} = \mathbb{A} \cdot \vec{a}$. □

Poznámka 5.27. Zkontrolujme, že Frobeniova věta je v souladu s tím, co známe z praktického počítání.

(a) Víme, že řešení existuje právě tehdy, když vektor pravé strany tvoří vedlejší sloupec po úpravě rozšířené matice soustavy do horního stupňovitého tvaru. Jelikož hodnost matice odpovídá počtu hlavních sloupců v horním stupňovitém tvaru, je vidět, že rovnost $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$ je ekvivalentní s tím, že pravá strana tvoří vedlejší sloupec.

(b) Umíme najít tolik LN řešení homogenní soustavy, kolik je vedlejších sloupců, a to je rovno $n - h(\mathbb{A})$, protože n je počet sloupců matice a $h(\mathbb{A})$ je počet hlavních sloupců matice.

Z Frobeniovy věty lze odvodit ekvivalentní definice regulární matice.

Důsledek 5.28. *Homogenní soustava s maticí $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ má pouze triviální řešení (tj. pouze nulový vektor je řešením), právě když $\mathbb{A}$ je regulární matice.*

Důsledek 5.29. *Nechť $\vec{b} \in T^n$. Soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ s maticí $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ má právě jedno řešení, právě když $\mathbb{A}$ je regulární matice.*

5.6 Hodnost součinu matic

Pro hodnost součinu matic platí analogická věta jako pro hodnost složeného zobrazení.

Věta 5.30 (Hodnost součinu matic)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\mathbb{B} \in T^{n,p}$. *Potom platí:*

1. $h(\mathbb{AB}) \leq h(\mathbb{A})$. *Je-li navíc* $n = p$ *a* $\mathbb{B}$ *regulární matice, pak* $h(\mathbb{AB}) = h(\mathbb{A})$.
2. $h(\mathbb{AB}) \leq h(\mathbb{B})$. *Je-li navíc* $m = n$ *a* $\mathbb{A}$ *regulární matice, pak* $h(\mathbb{AB}) = h(\mathbb{B})$.

Důkaz. Pro každé $\vec{x} \in T^n$ definujme $A\vec{x} = \mathbb{A}\vec{x}$ (to jest $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$), potom $h(A) = h(\mathbb{A})$ podle poznámky 5.22. Pro každé $\vec{x} \in T^p$ definujme $B\vec{x} = \mathbb{B}\vec{x}$, (tedy $B \in \mathcal{L}(T^p, T^n)$), pak $h(B) = h(\mathbb{B})$. Potom $AB\vec{x} = (\mathbb{AB})\vec{x}$, a tudíž $h(AB) = h(\mathbb{AB})$.

Z věty 4.33 o hodnosti složeného zobrazení víme:

1. $h(AB) \leq h(A)$. Je-li navíc B epimorfní, potom $h(AB) = h(A)$.
2. $h(AB) \leq h(B)$. Je-li navíc A monomorfní, pak $h(AB) = h(B)$.

Pokud $n = p$ a $\mathbb{B}$ je regulární matice, potom B je regulární operátor podle důsledku 5.25. Tím spíše je B epimorfní a rovnost $h(AB) = h(A)$ platí. Je-li $m = n$ a $\mathbb{A}$ je regulární matice, pak A je regulární operátor, tím spíše monomorfní. Proto $h(AB) = h(B)$. Přímo z definic zobrazení A, B, AB získáme tvrzení věty. Vlastně v předchozích vztazích všude jenom nahradíme zobrazení A, B maticemi $\mathbb{A}, \mathbb{B}$. $\square$

Poznámka 5.31. Obě nerovnosti ve větě 5.30 mohou být ostré. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, poté $\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy $0 = h(\mathbb{AB}) < \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\} = 1$.

5.7 Hodnost transponované matice ★

Velmi zajímavým netriviálním výsledkem je, že v každé matici je počet LN sloupců stejný jako počet LN řádků. K precizní formulaci tohoto tvrzení je třeba nejprve zavést pojem transponovaná matice a k důkazu budeme potřebovat také pojmy komplexně sdružená a hermitovsky sdružená matice. [36] A dále využijeme dvě pomocná lemmata.

Definice 5.32. Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ s komplexními prvky, pak

(a) matice **transponovaná** k matici $\mathbb{A}$ je typu $n \times m$, značí se $\mathbb{A}^T$ a splňuje pro každé $i \in \widehat{n},\ j \in \widehat{m}$
$$[\mathbb{A}^T]_{ij} := \mathbb{A}_{ji},$$

(b) matice **komplexně sdružená** k matici $\mathbb{A}$ je typu $m \times n$, značí se $\overline{\mathbb{A}}$ a splňuje pro každé $i \in \widehat{m},\ j \in \widehat{n}$
$$[\overline{\mathbb{A}}]_{ij} := \overline{\mathbb{A}_{ij}},$$

[36] Charles Hermite [výslovnost „šarl ermit“] (1822–1901), francouzský matematik

(c) matice **hermitovsky sdružená** k matici $\mathbb{A}$ je typu $n \times m$, značí se $\mathbb{A}^H$ a splňuje pro každé $i \in \widehat{n},\ j \in \widehat{m}$

$$[\mathbb{A}^H]_{ij} := \overline{\mathbb{A}_{ji}},$$

tj. $\mathbb{A}^H = \overline{\mathbb{A}^T}$. [37]

Poznámka 5.33. Rozmysleme si, že pojmy z definice 5.32 lze zavést i pro matice s prvky z jiného tělesa T. Ovšem u komplexního a hermitovského sdružování je potřeba hlídat, aby šlo o těleso, které je na komplexní sdružování uzavřené, tj. splňuje:

$$\alpha \in T \ \Rightarrow\ \overline{\alpha} \in T.$$

Jinak by výsledná matice neměla nutně prvky ze stejného tělesa T.

Příklad 5.34. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, potom $\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A},\ \mathbb{A}^H = \mathbb{A}^T$.

Nechť $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 1 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$, pak $\overline{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B}^H = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 1 \\ 1-\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Věta 5.35 (Vlastnosti $\mathbb{A}^T, \overline{\mathbb{A}}, \mathbb{A}^H$)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,p}$, potom platí:*

1. $\overline{\mathbb{A}^T} = \overline{\mathbb{A}}^T,\ (\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A},\ \overline{\overline{\mathbb{A}}} = \mathbb{A},\ (\mathbb{A}^H)^H = \mathbb{A}.$

2. $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T,\ \overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}}\ \overline{\mathbb{B}},\ (\mathbb{A}\mathbb{B})^H = \mathbb{B}^H\mathbb{A}^H.$

Důkaz. Vlastnosti plynou z definic a maticového násobení. Čtenář je ověří bez obtíží sám. □

Lemma 5.36. *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$. Pak $h(\mathbb{A}^H\mathbb{A}) = h(\mathbb{A})$.*

Důkaz. Označme

$$S_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}^H\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\} \text{ a } \tilde{S}_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Ukážeme, že $S_0 = \tilde{S}_0$.

- $\tilde{S}_0 \subset S_0$: Tato inkluze platí, protože splňuje-li $\vec{x}$, že $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$, pak $\mathbb{A}^H\mathbb{A}\vec{x} = \mathbb{A}^H\vec{0} = \vec{0}$.

[37] Častá notace hermitovsky sdružené matice k $\mathbb{A}$ je $\mathbb{A}^*$. Pak se ale také setkáme se situací, kdy je hvězdička vyhrazena pro komplexní sdružování, tj. $\mathbb{A}^*$ znamená komplexně sdruženou matici. Hermitovsky sdružená se potom značí například $\mathbb{A}^\#$. Pro matici transponovanou se pro změnu též používá symbol $\mathbb{A}'$.

- $\tilde{S}_0 \supset S_0$: Nechť $\vec{x} \in S_0$, tj. $\mathbb{A}^H\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$. Vynásobíme obě strany rovnosti zleva opruhovaným a transponovaným vektorem $\vec{x}$ (jde tudíž o řádek). Potom $\vec{x}^H\mathbb{A}^H\mathbb{A}\vec{x} = 0$. Podle věty 5.35 máme $\vec{x}^H\mathbb{A}^H = (\mathbb{A}\vec{x})^H$, z čehož plyne $(\mathbb{A}\vec{x})^H\mathbb{A}\vec{x} = 0$. Jelikož $\mathbb{A}\vec{x} \in \mathbb{C}^m$, můžeme jeho složky označit $\mathbb{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$. Poté $(\mathbb{A}\vec{x})^H = (\overline{z_1}\ \overline{z_2} \dots \overline{z_m})$. Dostáváme:

$$(\mathbb{A}\vec{x})^H\mathbb{A}\vec{x} = (\overline{z_1}\ \overline{z_2} \dots \overline{z_m}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_m|^2 = 0.$$

  Odtud plyne, že $z_1 = z_2 = \cdots = z_m = 0$. Tedy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$, což znamená, že $\vec{x} \in \tilde{S}_0$.

Z Frobeniovy věty víme, že $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A}^H\mathbb{A})$ a $\dim \tilde{S}_0 = n - h(\mathbb{A})$. Jelikož $S_0 = \tilde{S}_0$, máme $h(\mathbb{A}^H\mathbb{A}) = h(\mathbb{A})$. □

Lemma 5.37. *Pro libovolnou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$ platí, že $h(\mathbb{A}) = h(\overline{\mathbb{A}})$.*

Důkaz. Ukažme, že $h(\mathbb{A}) \leq h(\overline{\mathbb{A}})$. Opačná nerovnost se ukáže tak, že dosadíme $\overline{\mathbb{A}}$ a využijeme toho, že $\overline{\overline{\mathbb{A}}} = \mathbb{A}$. Je-li $h(\mathbb{A}) = 0$, pak nerovnost platí triviálně. Je-li $h(\mathbb{A}) = k \in \mathbb{N}$, potom existují vzájemně různé indexy $j_1, j_2, \dots, j_k \in \hat{n}$ tak, že vektory $\mathbb{A}_{\bullet j_1}, \mathbb{A}_{\bullet j_2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet j_k}$ jsou LN. Dokažme sporem, že poté $\overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_1}, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_2}, \dots, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_k}$ jsou také LN vektory, a tedy $h(\overline{\mathbb{A}}) \geq k$.

Pokud by byly vektory $\overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_1}, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_2}, \dots, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_k}$ LZ, pak by existovala čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, přičemž alespoň jedno z nich by bylo nenulové a $\sum_{i=1}^k \alpha_i \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_i} = \vec{0}$. Potom by ovšem platilo:

$$\vec{0} = \overline{\sum_{i=1}^k \alpha_i \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_i}} = \sum_{i=1}^k \overline{\alpha_i} \mathbb{A}_{\bullet j_i}.$$

To by byla ale netriviální LK sloupců matice $\mathbb{A}_{\bullet j_1}, \mathbb{A}_{\bullet j_2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet j_k}$ rovná nulovému vektoru, a tedy bychom dostali spor s jejich lineární nezávislostí. □

Nyní máme prostředky na to, abychom dokázali větu o hodnosti transponované matice. Nejprve vyslovíme tvrzení pro matice s komplexními prvky. Posléze si rozmyslíme, že platí pro matice s prvky z libovolného tělesa.

Věta 5.38. *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$. Pak $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$.*
Slovy: „Každá komplexní matice obsahuje stejný počet LN sloupců jako LN řádků."

Důkaz. Na jednu stranu máme $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^H\mathbb{A}) \leq h(\mathbb{A}^H) = h(\overline{\mathbb{A}^T}) = h(\mathbb{A}^T)$, kde bylo v první rovnosti využito lemma 5.36, v nerovnosti věta 5.30 o hodnosti součinu matic, v další rovnosti definice hermitovsky sdružené matice a v poslední rovnosti lemma 5.37. Jelikož $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$, musí ovšem platit i obrácená nerovnost. Stačí do nerovnosti místo $\mathbb{A}$ dosadit $\mathbb{A}^T$. □

Věta 5.39 (Hodnost transponované matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A}$ *je libovolná matice s prvky z tělesa* T*. Potom* $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$*.*
Slovy: „Každá matice obsahuje stejný počet LN sloupců jako LN řádků.“

Důkaz. Dokázali jsme větu pro speciální případ $T = \mathbb{C}$. Jak si čtenář jistě rozmyslel v úkolu 5.20, je hodnost matice s prvky z tělesa T stejná, ať ji počítáme nad tělesem T, či nad $\mathbb{C}$. Proto tvrzení věty 5.39 plyne z věty 5.38. □

Úkol 5.40. **

1. Vymyslete konkrétní číselné těleso T, které není uzavřené na komplexní sdružování. Pokud bychom takovým tělesem nahradili $\mathbb{C}$ v předpokladech, lemmata 5.36 a 5.37 by neměla dobrý smysl.

2. Důkaz rovnosti mezi hodností matice a matice k ní transponované lze provést také pomocí úpravy do horního stupňovitého tvaru, která hodnost nemění. Sami takový důkaz navrhněte.

Přemýšlivý čtenář se jistě ptá, proč jsme neprovedli důkaz věty 5.39 pomocí úpravy do horního stupňovitého tvaru rovnou, a místo toho provádíme důkaz pomocí lemmat 5.36 a 5.37. Dali jsme mu přednost, protože jsme v něm využili svých čerstvých znalostí Frobeniovy věty a hodnosti součinu matic. Navíc jde opět o vzpomínku na asistenta Pytlíčka, kterému tento důkaz poslal jeho bývalý student, v té době již pracující. Třeba i čtenář těchto skript, až bude jednou sedět před obrazovkou počítače v kanceláři, bude ještě rád vzpomínat na hodiny matematiky a vymýšlení elegantních důkazů se mu stane koníčkem.