4 Lineární zobrazení

Motivace. Diferenciální rovnice jsou partií matematiky, která má uplatnění ve fyzice, ekonomii, biologii, chemii atd. Prostě a jednoduše, vymyslete si jakýkoliv jev a je pravděpodobné, že ho bude modelovat řešení nějaké diferenciální rovnice. **Obyčejnou lineární diferenciální rovnicí** řádu n nazýváme rovnici:

$$f^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)f'(x) + p_0(x)f(x) = q(x),$$

přičemž $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, q$ jsou spojité funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a $f^{(k)}(x)$ značí k-tou derivaci funkce f v bodě x. Na konci kapitoly si popíšeme, jak úzce takové diferenciální rovnice souvisí s lineárními zobrazeními.

4.1 Definice lineárního zobrazení

Definice 4.1. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Zobrazení $A\colon P \to Q$ nazveme **lineárním (homomorfním)**, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

1. Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí, že $A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$ (**aditivita** zobrazení A).

2. Pro každé $\alpha \in T$ a každý vektor $\vec{x} \in P$ platí, že $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x})$ (**homogenita** zobrazení A).

Místo $A(\vec{x})$ budeme častěji psát $A\vec{x}$.

Poznámka 4.2. Lineární zobrazení má smysl zavádět jen pro vektorové prostory P, Q nad stejným tělesem. V druhé podmínce (homogenita) se totiž čísly z tělesa násobí jak vektory $\vec{x}$ z P, tak i vektory $A\vec{x}$ z Q.

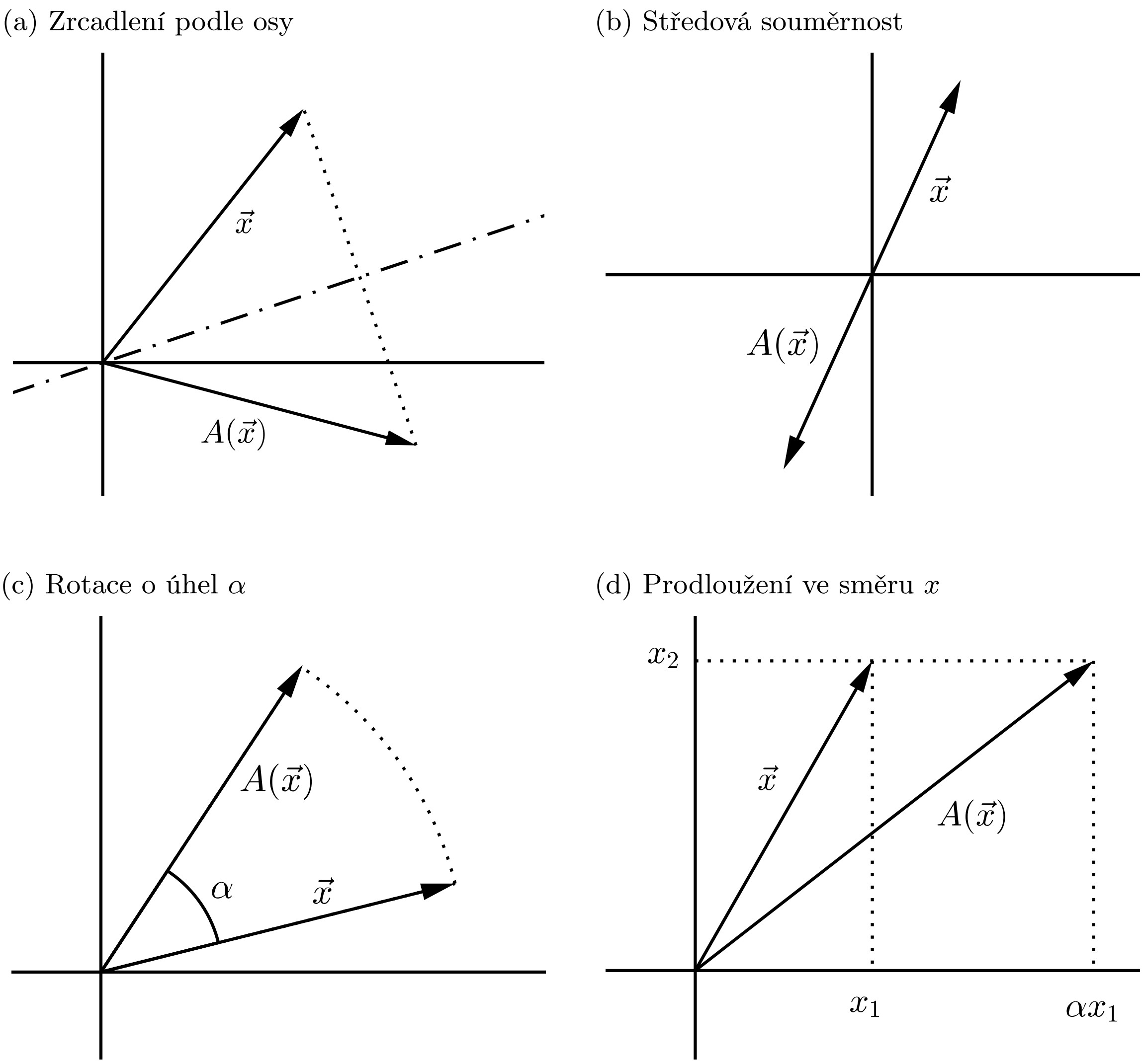
Poznámka 4.3. Pro každé lineární zobrazení $A\colon P \to Q$ platí, že $A\vec{0}_P = \vec{0}_Q$, přičemž $\vec{0}_P$ je nulový vektor z P a $\vec{0}_Q$ je nulový vektor z Q.

Důkaz. Platí $A\vec{0}_P = A(0\vec{0}_P) = 0(A\vec{0}_P) = \vec{0}_Q$, kde v první a poslední rovnosti je využit fakt z věty 2.10, že $0\vec{a} = \vec{0}$ pro každý vektor $\vec{a}$, a ve druhé rovnosti je využita homogenita A. □

Příklad 4.4. Uveďme nejznámější příklady lineárních zobrazení $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ilustrace je na obrázku 7.

(a) Zrcadlení podle osy jdoucí počátkem $\binom{0}{0}$.

(b) Středová souměrnost.



Obrázek 7: Příklady lineárních zobrazení $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(c) Rotace o úhel α proti směru hodinových ručiček. (Samozřejmě, že také rotace o úhel α po směru hodinových ručiček je lineární zobrazení, neboť jde vlastně o rotaci o úhel $2\pi - \alpha$ proti směru hodinových ručiček.)

Středová souměrnost je vlastně speciální případ rotace pro $\alpha = \pi$.

(d) Prodloužení (zkrácení) ve směru $\vec{e}_1$. (Zobrazení přiřadí vektoru $\binom{x_1}{x_2}$ vektor $\binom{\alpha x_1}{x_2}$, přičemž pro $\alpha > 1$ jde o prodloužení a pro $0 < \alpha < 1$ o zkrácení ve směru $\vec{e}_1$.) Podobně lze definovat prodloužení (zkrácení) ve směru $\vec{e}_2$.

U všech zobrazení si čtenář sám ověří, že jsou lineární.

Věta 4.5 (Alternativní definice lineárního zobrazení)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Nechť $A\colon P \to Q$. Pak následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *A je lineární zobrazení.*
2. $(\forall \alpha \in T)(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha A\vec{x} + A\vec{y})$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T)(\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in P)(A(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\vec{x}_i)$.

Důkaz. ★

- 1. ⇒ 2.: Nechť $\alpha \in T, \vec{x}, \vec{y} \in P$, pak podle aditivity A a poté homogenity A platí, že $A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = A(\alpha\vec{x}) + A\vec{y} = \alpha A\vec{x} + A\vec{y}$.
- 2. ⇒ 3.: Nechť $\vec{x} \in P$, pak $\vec{0}_P = (-1)\vec{x} + \vec{x}$. Podle druhého bodu proto máme $A\vec{0}_P = (-1)A\vec{x} + A\vec{x} = \vec{0}_Q$. Tedy obraz nulového vektoru je nulový vektor. Dokažme nyní tvrzení matematickou indukcí. Pro $n = 1$, $\alpha_1 \in T$ a $\vec{x}_1 \in P$ platí, že $\alpha_1\vec{x}_1 = \alpha_1\vec{x}_1 + \vec{0}_P$. Proto podle druhého bodu máme:

  $$A(\alpha_1\vec{x}_1) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + A\vec{0}_p = \alpha_1 A\vec{x}_1 + \vec{0}_Q = \alpha_1 A\vec{x}_1.$$

  Nechť pro nějaké $n \geq 1$ tvrzení platí. Uvažujme libovolná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1} \in T$ a vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n+1} \in P$, potom $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\vec{x}_i = \alpha_1\vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i\vec{x}_i$. Tudíž podle druhého bodu a poté podle indukčního předpokladu máme:

  $$A\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\vec{x}_i\right) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + A\left(\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i\vec{x}_i\right) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i A\vec{x}_i.$$

- 3. ⇒ 1.: Nechť $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y} \in P$, pak $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x}$ (dosadili jsme $n = 1, \alpha_1 = \alpha$, $\vec{x}_1 = \vec{x}$) a $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x}+A\vec{y}$ (dosadili jsme $n = 2, \vec{x}_1 = \vec{x}, \vec{x}_2 = \vec{y}$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$). □

Druhý bod věty 4.5 zkracuje ověřování linearity zobrazení, proto jej budeme v následujících důkazech využívat, místo abychom vycházeli přímo z definice.

Definice 4.6. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Množinu lineárních zobrazení $P \to Q$ značíme $\mathcal{L}(P, Q)$. [25] Nechť $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\alpha \in T$, pak definujeme operace:

- **sčítání zobrazení** $A + B$ pro každý vektor $\vec{x} \in P$ vztahem $(A + B)\vec{x} := A\vec{x} + B\vec{x}$,
- **násobení zobrazení** A **číslem** α pro každý vektor $\vec{x} \in P$ vztahem $(\alpha A)\vec{x} := \alpha A\vec{x}$.

Věta 4.7 (Vektorový prostor lineárních zobrazení)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Potom množina $\mathcal{L}(P, Q)$ s operacemi sčítání zobrazení a násobení zobrazení číslem definovanými výše tvoří vektorový prostor nad T.*

[25] Někteří matematici používají symbol $\mathrm{Hom}(P, Q)$ nebo $L(P, Q)$.

Důkaz. ★ Je třeba ověřit:

- Neprázdnost $\mathcal{L}(P, Q)$:
  $\mathcal{L}(P, Q)$ obsahuje **nulové zobrazení** Θ, které každému vektoru z P přiřazuje nulový vektor z Q. Jde o lineární zobrazení, protože pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\alpha \in T$ platí:
  $$\Theta(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0}_Q = \alpha\vec{0}_Q + \vec{0}_Q = \alpha\Theta\vec{x} + \Theta\vec{y}.$$

- Uzavřenost na sčítání vektorů:
  Pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ ověříme, že $A + B$ je lineární zobrazení.
  Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\beta \in T$ platí:
  $$\begin{aligned} (A+B)(\beta\vec{x} + \vec{y}) &= A(\beta\vec{x} + \vec{y}) + B(\beta\vec{x} + \vec{y}) && \text{(definice } A+B\text{)} \\ &= (\beta A\vec{x} + A\vec{y}) + (\beta B\vec{x} + B\vec{y}) && \text{(linearita } A \text{ a } B\text{)} \\ &= \beta(A\vec{x} + B\vec{x}) + (A\vec{y} + B\vec{y}) && \text{(vlastnosti prostoru } Q\text{)} \\ &= \beta(A+B)\vec{x} + (A+B)\vec{y} && \text{(definice } A+B\text{).} \end{aligned}$$

- Uzavřenost na násobení vektoru číslem:
  Pro každé $\alpha \in T$ a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ ověříme, že αA je lineární zobrazení.
  Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\beta \in T$ platí:
  $$\begin{aligned} (\alpha A)(\beta\vec{x} + \vec{y}) &= \alpha A(\beta\vec{x} + \vec{y}) && \text{(definice } \alpha A\text{)} \\ &= \alpha(\beta A\vec{x} + A\vec{y}) && \text{(linearita } A\text{)} \\ &= \alpha(\beta A\vec{x}) + \alpha A\vec{y} && \text{(vlastnosti prostoru } Q\text{)} \\ &= \beta(\alpha A\vec{x}) + \alpha A\vec{y} && \text{(vlastnosti prostoru } Q\text{)} \\ &= \beta(\alpha A)\vec{x} + (\alpha A)\vec{y} && \text{(definice } \alpha A\text{).} \end{aligned}$$

- Platnost osmi axiomů vektorového prostoru:

  1. Pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $A + B = B + A$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} = B\vec{x} + A\vec{x} = (B+A)\vec{x}$. Využili jsme komutativního zákona pro sčítání vektorů v prostoru Q.
  2. Pro každé $A, B, C \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $A + (B + C) = (A + B) + C$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(A + (B + C))\vec{x} = A\vec{x} + (B + C)\vec{x} = A\vec{x} + (B\vec{x} + C\vec{x}) = (A\vec{x} + B\vec{x}) + C\vec{x} = (A+B)\vec{x} + C\vec{x} = ((A+B)+C)\vec{x}$. Využili jsme asociativního zákona pro sčítání vektorů v prostoru Q.
  3. Existuje zobrazení $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ tak, že pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $A + B = A$. Stačí položit $B = \Theta$ (nulové zobrazení), o kterém už víme, že je lineární. Jistě roli nulového vektoru hraje, protože pro každé $\vec{x} \in P$ platí, že $(A + \Theta)\vec{x} = A\vec{x} + \Theta\vec{x} = A\vec{x} + \vec{0}_Q = A\vec{x}$.

4. Pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ existuje $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ tak, že $A + B = \Theta$. Stačí položit $B = (-1)A$, o kterém z uzavřenosti na násobení číslem víme, že je lineární. Snadno ověříme, že hraje roli opačného vektoru k A, protože pro každé $\vec{x} \in P$ platí, že $(A + ((-1)A))\vec{x} = A\vec{x} + ((-1)A)\vec{x} = A\vec{x} + (-1)A\vec{x} = A\vec{x} - A\vec{x} = \vec{0}_Q$.
5. Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, protože pro každý vektor $\vec{x} \in P$ máme $(\alpha(\beta A))\vec{x} = \alpha(\beta A)\vec{x} = \alpha(\beta A\vec{x}) = (\alpha\beta)A\vec{x} = ((\alpha\beta)A)\vec{x}$. Využili jsme asociativního zákona vzhledem k násobení vektoru číslem v Q.
6. Pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $1A = A$, což plyne přímo z definice násobení zobrazení číslem.
7. Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $((\alpha + \beta)A)\vec{x} = (\alpha + \beta)A\vec{x} = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{x} = (\alpha A)\vec{x} + (\beta A)\vec{x} = (\alpha A + \beta A)\vec{x}$. Využili jsme distributivity násobení vektoru číslem v Q vzhledem ke sčítání čísel.
8. Pro každé $\alpha \in T$ a pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí, že $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(\alpha(A + B))\vec{x} = \alpha(A + B)\vec{x} = \alpha(A\vec{x} + B\vec{x}) = \alpha A\vec{x} + \alpha B\vec{x} = (\alpha A)\vec{x} + (\alpha B)\vec{x} = (\alpha A + \alpha B)\vec{x}$. Využili jsme distributivity násobení vektoru číslem vzhledem ke sčítání vektorů v Q. $\square$

Definice 4.8. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T.

(a) Je-li $A \in \mathcal{L}(V, V)$, nazýváme A **lineárním operátorem** a píšeme $\mathcal{L}(V)$ místo $\mathcal{L}(V, V)$. [26]

(b) Je-li $\varphi \in \mathcal{L}(V, T)$, nazýváme φ **lineárním funkcionálem**, píšeme $V^{\#}$ místo $\mathcal{L}(V, T)$. Prostor $V^{\#}$ nazýváme **duálním prostorem** k V. [27]

Příklad 4.9. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T.

(a) Příkladem lineárního operátoru je **identický operátor** I, který každému $\vec{x} \in V$ přiřadí $I\vec{x} := \vec{x}$. [28]

(b) Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze V. Pak pro každé $i \in \hat{n}$ je i-tý souřadnicový funkcionál $x_i^{\#}$ v bázi $\mathcal{X}$ příkladem lineárního funkcionálu, přičemž aditivita a homogenita $x_i^{\#}$ plynou z věty 2.58 o vlastnostech souřadnicového funkcionálu.

Definice 4.10. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

[26] Lineární operátor je také nazýván endomorfismem.

[27] Lineární funkcionál najdeme v jiných zdrojích též pod názvem lineární forma. Duální prostor se také značí $\tilde{V}$ nebo V^*.

[28] Je možné se setkat i se symbolem 1_V nebo id_V místo I.

(a) Je-li A prosté, řekneme, že A je **monomorfním** zobrazením.

(b) Je-li A „na“ Q, řekneme, že A je **epimorfním** zobrazením.

(c) Je-li A prosté a „na“ Q, řekneme, že A je **izomorfním** zobrazením.

(d) Je-li A izomorfní a $P = Q$, řekneme, že A je **regulárním operátorem**. [29]

Poznámka 4.11. Definice prostého zobrazení a zobrazení „na“ (surjektivního) známe z matematické analýzy. Přesto je připomeneme. Nechť $A\colon P \to Q$.

- A je prosté, pokud $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)((A\vec{x} = A\vec{y}) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{y}))$.
- A je „na“ Q, pokud $(\forall \vec{y} \in Q)(\exists \vec{x} \in P)(A\vec{x} = \vec{y})$.

Uvědomme si, že monomorfní a prosté zobrazení není totéž. Prosté zobrazení totiž nemusí být lineární. Podobně epimorfní a surjektivní zobrazení není totéž.

Příklad 4.12. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T. Ukažte, že souřadnicový izomorfismus $(.)_\mathcal{X}$ v bázi $\mathcal{X}$ je skutečně izomorfismus.

Řešení: Připomeňme, že pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ je souřadnicový izomorfismus definován vztahem $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Z důsledku 2.60 o vlastnostech souřadnicového izomorfismu plyne jeho linearita. Zbývá tedy dokázat, že $(.)_\mathcal{X}\colon V_n \to T^n$ je prosté a „na“ T^n.

- Prostota:

  Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí, že je-li $(\vec{x})_\mathcal{X} = (\vec{y})_\mathcal{X}$ a označíme-li $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, potom z definice souřadnicového izomorfismu máme $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{y}$.

- „na“ T^n:

  Nechť $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$, poté pro $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \in V_n$ platí, že $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Věta 4.13 (Linearita inverzního zobrazení)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a A je izomorfní. Pak $A^{-1} \in \mathcal{L}(Q, P)$, tj. A^{-1} existuje a je také izomorfní.*

[29] Regulární operátor bývá také nazýván automorfismem.

Důkaz. Jelikož A je prosté zobrazení s definičním oborem P a oborem hodnot Q, víme z matematické analýzy, že A^{-1} existuje, má definiční obor Q a obor hodnot P. Zbývá ověřit, že $A^{-1} \in \mathcal{L}(Q, P)$.

Pro každé $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in Q$ a pro každé $\alpha \in T$ ověříme, že $A^{-1}(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \alpha A^{-1}\vec{y}_1 + A^{-1}\vec{y}_2$. Označme $\vec{x}_1 = A^{-1}\vec{y}_1$ a $\vec{x}_2 = A^{-1}\vec{y}_1$. Potom z definice inverzního zobrazení víme, že $\vec{y}_1 = A\vec{x}_1$ a $\vec{y}_2 = A\vec{x}_2$. Z linearity A dostáváme, že $\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \alpha A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = A(\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$. Opět z definice inverzního zobrazení dostáváme:

$$A^{-1}(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \alpha A^{-1}\vec{y}_1 + A^{-1}\vec{y}_2. \qquad \square$$

Věta 4.14 (Linearita složeného zobrazení)**.** *Nechť P, Q, V jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $A \in \mathcal{L}(Q, V)$. Pak $AB \in \mathcal{L}(P, V)$.* [30]

Důkaz. Složené zobrazení je pro každé $\vec{x} \in P$ definováno $(AB)\vec{x} := A(B\vec{x})$. Jde tudíž o zobrazení P do V (A působí na vektor $B\vec{x}$, který je z Q). Zbývá ověřit linearitu.

Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a pro každé $\alpha \in T$ platí:

$$\begin{aligned}
(AB)(\alpha\vec{x} + \vec{y}) &= A(B(\alpha\vec{x} + \vec{y})) && \text{(definice } AB\text{)}\\
&= A(\alpha B\vec{x} + B\vec{y}) && \text{(linearita } B\text{)}\\
&= \alpha A(B\vec{x}) + A(B\vec{y}) && \text{(linearita } A\text{)}\\
&= \alpha(AB)\vec{x} + (AB)\vec{y} && \text{(definice } AB\text{).}
\end{aligned}$$

$\square$

Příklad 4.15. Nechť zobrazení $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $B\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ jsou definována:

- pro každé $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ je $A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$,
- pro každé $(\alpha_1) \in \mathbb{R}^1$ je $B(\alpha_1) = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ -\alpha_1\\ \alpha_1\end{pmatrix}$.

Ověřte, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$. Dále najděte předpis pro složené zobrazení AB, které je podle věty 4.14 také lineární.

Řešení: Pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned}
A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) &= A\begin{pmatrix}\alpha\alpha_1+\beta_1\\ \alpha\alpha_2+\beta_2\\ \alpha\alpha_3+\beta_3\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}(\alpha\alpha_1+\beta_1)+(\alpha\alpha_2+\beta_2)\\ \alpha\alpha_3+\beta_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\\ \alpha\alpha_3+\beta_3\end{pmatrix} &&= \alpha\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_1+\beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}\\
&= \alpha A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} &&= \alpha A\vec{x} + A\vec{y},
\end{aligned}$$

[30] Složené zobrazení se také značí $A \circ B$.

kde jsme využili vlastnosti sčítání a násobení čísel v $\mathbb{R}$ a definici sčítání vektorů v $\mathbb{R}^2$. Podobně čtenář sám ověří, že $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$.

Pro každé $(\alpha_1) \in \mathbb{R}^1$ platí:

$$(AB)(\alpha_1) = A(B(\alpha_1)) = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Úkol 4.16. Nechť P, Q, V jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $A \in \mathcal{L}(Q, V)$. Dokažte následující implikace:

(a) Je-li A i B monomorfní, potom AB je monomorfní.

(b) Je-li A i B epimorfní, potom AB je epimorfní.

(c) Je-li A i B izomorfní, potom AB je izomorfní.

(d) Je-li AB monomorfní, potom B je monomorfní.

(e) Je-li AB epimorfní, potom A je epimorfní.

Definice 4.17. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $M \subset P$ a $N \subset Q$. Pak (stejně jako v matematické analýze – viz obrázek 8):

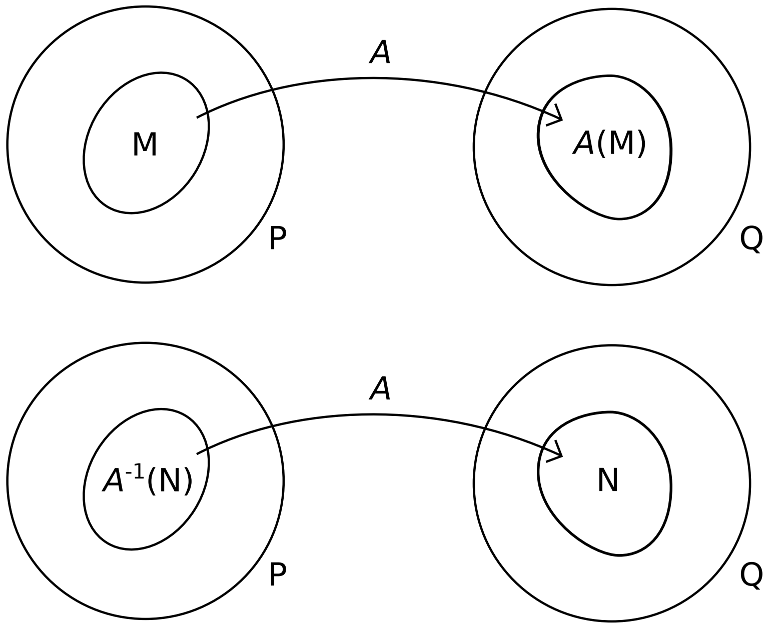
- **Obrazem** M při zobrazení A nazveme množinu $A(M) \coloneqq \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in M\}$.
- **Vzorem** N při zobrazení A nazveme množinu $A^{-1}(N) \coloneqq \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} \in N\}$.

Místo $A^{-1}(\{\vec{x}\})$ budeme psát $A^{-1}(\vec{x})$.

Příklad 4.18. Nechť zobrazení A, B jsou definována stejně jako v příkladu 4.15.

- Je-li $M = \{(1), (2), (3)\}$, potom $B(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.
- Je-li $N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a $N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, pak $B^{-1}(N_1) = \{(1)\}$ a $B^{-1}(N_2) = \emptyset$.
- Je-li $N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, potom $A^{-1}(N) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Poznámka 4.19. Nepleťme si vzor množiny $A^{-1}(N)$ (jde o množinu) s inverzním zobrazením A^{-1} (jde o zobrazení). I pro zobrazení, která nejsou prostá, má smysl hovořit o vzorech množin. Viz předchozí příklad, kde $A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ existuje, ale A není prosté, protože například $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Přitom ovšem $A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nemá bez prostoty A smysl, protože jde o obraz vektoru $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ při neexistujícím zobrazení A^{-1}.



Obrázek 8: Obraz a vzor množiny.

Věta 4.20 (Obraz a vzor podprostoru)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $M \subset\subset P$ a $N \subset\subset Q$. Potom platí:*

1. $A(M) \subset\subset Q$.
   Slovy: „Lineární obraz podprostoru je podprostor."

2. $A^{-1}(N) \subset\subset P$.
   Slovy: „Lineární vzor podprostoru je podprostor."

Speciálně $A(P) \subset\subset Q$ a $A^{-1}(\vec{0}_Q) \subset\subset P$.

Důkaz. Ověříme axiomy podprostoru. Čtenář si jistě všimne, kde v důkazu využíváme, že M, respektive N je podprostor.

1. • $A(M) \subset Q$, což plyne přímo z definice.
   • $A(M) \neq \emptyset$, protože například $\vec{0}_Q = A(\vec{0}_P)$ a $\vec{0}_P \in M$, proto $\vec{0}_Q \in A(M)$.
   • Množina $A(M)$ je uzavřená na násobení vektoru číslem a sčítání: Pro každé $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in A(M)$ a pro každé $\alpha \in T$ existují $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M$ tak, že $\vec{y}_1 = A\vec{x}_1$ a $\vec{y}_2 = A\vec{x}_2$, a platí:

$$\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \alpha A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = A(\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \in A(M).$$

2. • $A^{-1}(N) \subset P$, což plyne přímo z definice.
   • $A^{-1}(N) \neq \emptyset$, protože například $\vec{0}_Q = A(\vec{0}_P)$ a $\vec{0}_Q \in N$, proto $\vec{0}_P \in A^{-1}(N)$.

- Množina $A^{-1}(N)$ je uzavřená na násobení vektoru číslem a sčítání: Pro každé $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A^{-1}(N)$ a $\alpha \in T$ platí, že $A\vec{x}_1 \in N,\ A\vec{x}_2 \in N$, a dále z linearity A dostaneme:
$$A(\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \alpha A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 \in N.$$
Proto $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in A^{-1}(N)$. □

4.2 Hodnost, jádro, defekt

Definice 4.21. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

(a) **Hodností** A nazveme $\dim A(P)$ a značíme ji $h(A)$. [31]

(b) **Jádrem** A nazveme $A^{-1}(\vec{0}_Q) = \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{0}_Q\}$ a značíme ho $\ker A$. [32]

(c) **Defektem** A nazveme $\dim \ker A$ a značíme ho $d(A)$.

Poznámka 4.22. Má smysl uvažovat dimenzi oboru hodnot $A(P)$ a jádra $\ker A$, protože z věty 4.20 o obrazech a vzorech podprostorů plyne, že jde o podprostory.

Příklad 4.23. Pro zobrazení A, B z příkladu 4.15 určete hodnost, jádro a defekt.

Řešení:

- $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$
Proto $d(A) = 1$. Dále $A(\mathbb{R}^3) \subset\subset \mathbb{R}^2$, proto $h(A) \le 2$.
Zároveň $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in A(\mathbb{R}^3)$ a $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in A(\mathbb{R}^3)$, proto $h(A) \ge 2$. Suma sumárum je $h(A) = 2$ a z věty 3.6 o vlastnostech podprostorů plyne, že $A(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.

- $\ker B = \left\{ (\alpha_1) \in \mathbb{R}^1 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(0)\}$. Proto $d(B) = 0$.
Dále $B(\mathbb{R}^1) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Tudíž $h(B) = 1$.

[31] Zejména v anglické literatuře se objevuje pro hodnost zobrazení A symbol $r(A)$ od slova rank, což je anglicky hodnost. Místo $A(P)$ se též setkáme se symboly Im A, $\mathbb{I}$m A nebo **Im** A – z anglického image – a místo oboru hodnot A se pak říká obraz A. V anglické literatuře je časté i značení $\mathrm{Ran}(A)$ a $\mathcal{R}(A)$ podle slova range(space), což je anglicky obor hodnot.

[32] Symbol ker je z anglického kernel, což znamená jádro. Setkáme se i se značením Ker A, $\mathbb{K}$er A nebo **Ker** A. V anglické literatuře se kupodivu více používá $\mathcal{N}(A)$ podle slova nullspace.

Definujme dva významné operátory na prostoru polynomů, které nám budou často sloužit jako příklady rozdílného chování zobrazení na prostorech konečné a nekonečné dimenze.

Definice 4.24. Nechť $p \in \mathcal{P}$, $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Pak definujeme operátory $D, S \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ pro každé $t \in \mathbb{C}$ vztahy:

$$(Dp)(t) := \sum_{j=1}^{n} j \alpha_j t^{j-1},$$

$$(Sp)(t) := \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha_j}{j+1} t^{j+1}.$$

D nazýváme **operátorem derivování** a S **operátorem integrování**.

Názvy operátorů pramení z jejich podobnosti s derivací, respektive primitivní funkcí, jak je známe z matematické analýzy.

Úkol 4.25. * Dokažte následující vlastnosti operátorů derivování a integrování:

(a) $D, S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$.

(b) D není monomorfní a je epimorfní, S je monomorfní a není epimorfní.

(c) $\ker D = [e_1]_\lambda$ a $\ker S = \{\mathcal{O}\}$.

(d) $D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ a $S(\mathcal{P}) = \{\text{polynomy s nulovým konstantním členem}\}$.

(e) D i S lze zúžit na prostor konečné dimenze $\mathcal{P}_n$. Potom $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m)$, kde $m \geq n-1$, a $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m)$, kde $m \geq n+1$. Tudíž už nejde nutně o operátory. Prozkoumejte i pro taková zúžení jejich jádro a obor hodnot v závislosti na volbě m.

Věta 4.26 (Obraz lineárního obalu)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z P. Pak platí:*

$$A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda.$$

Důkaz. $\vec{y} \in A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) \;\Leftrightarrow\;$ existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{y} = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right)$ $\Leftrightarrow$ existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\vec{x}_i \;\Leftrightarrow\; \vec{y} \in [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$, přičemž ve druhé ekvivalenci jsme využili linearitu A. □

Příklad 4.27. Věta 4.26 o obrazu lineárního obalu umožňuje vypočítat jednoduše hodnost zobrazení. Mějme A jako v příkladě 4.15. Spočtěte $h(A)$.

Řešení:

$$A(\mathbb{R}^3) = A\left(\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda\right) = \left[A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda = \mathbb{R}^2,$$

proto $h(A) = 2$.

Důsledek 4.28 (Dimenze obrazu podprostoru)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $P_1 \subset\subset P$. Potom platí, že $\dim A(P_1) \leq \dim P_1$. Speciálně $h(A) \leq \dim P$.*

Důkaz.

- Je-li $P_1 = \{\vec{0}\}$, pak $A(P_1) = \{\vec{0}\}$ a nerovnost platí.
- Je-li $\dim P_1 = +\infty$, potom je také nerovnost zřejmá.
- Je-li $\dim P_1 \in \mathbb{N}$, pak existuje báze P_1 a nerovnost je důsledkem věty 4.26. □

Věta 4.29 (Prostota a jádro lineárního zobrazení)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Potom A je prosté, právě když $\ker A = \{\vec{0}_P\}$.*

Důkaz. Zobrazení A je prosté, právě když pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí:

$$(A\vec{x} = A\vec{y}) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{y}).$$

Díky linearitě A lze výrok přepsat do tvaru:

$$(A(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}_Q) \Rightarrow (\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}_P).$$

Ten je poté evidentně ekvivalentní s tvrzením, že pro každé $\vec{z} \in P$ platí:

$$(A\vec{z} = \vec{0}_Q) \Rightarrow (\vec{z} = \vec{0}_P).$$

Podle definice jádra je toto ekvivalentní s $\ker A = \{\vec{0}_P\}$. □

Příklad 4.30. Ukážeme, že tvrzení obdobné větě 4.29 pro zobrazení, které není lineární, neplatí. Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkcionál definovaný následovně: Pro každé $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definujeme $\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. Pak φ není prostý – například $\varphi\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Zároveň ale $\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$. Podle věty 4.29 o prostotě a jádru lineárního zobrazení je jasné, že φ není lineární. Předpoklad linearity zobrazení A v předchozí větě je nezbytný!

Věta 4.31 (Prostota a dimenze obrazu podprostoru)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a A je monomorfní.*

1. *Jsou-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ LN vektory v P, potom jsou $A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n$ LN v Q.*
2. *Je-li $P_1 \subset\subset P$, pak $\dim A(P_1) = \dim P_1$. Speciálně $h(A) = \dim P$.*

Důkaz.

1. Nechť $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\vec{x}_i = \vec{0}_Q$. Potom $A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \vec{0}_Q$, tj. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \in \ker A$. Jelikož A je prosté, platí podle věty 4.29, že $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}_P$. Z LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ plyne, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

2. Nerovnost $\dim A(P_1) \leq \dim P_1$ vyplývá z důsledku 4.28. Pro důkaz opačné nerovnosti rozlišíme několik případů:

   - Je-li $P_1 = \{\vec{0}_P\}$, pak nerovnost $\dim A(P_1) \geq \dim P_1$ platí triviálně.
   - Je-li $\dim P_1 = n \in \mathbb{N}$, pak existuje báze $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ prostoru P_1. Podle prvního už dokázaného bodu jsou vektory $A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n$ LN, proto dostáváme:

   $$\dim A(P_1) \geq n = \dim P_1.$$

   - Je-li $\dim P_1 = +\infty$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje v P_1 n LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$. Podle prvního bodu jsou pak vektory $A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n$ LN. Tudíž $\dim A(P_1) = +\infty$. □

Důsledek 4.32 (Hodnost izomorfismu)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je izomorfní. Potom $h(A) = \dim P$ a $h(A) = \dim Q$.*

Důkaz. První rovnost plyne z věty 4.31 (využíváme monomorfnosti) a druhá z faktu, že $A(P) = Q$ (využíváme epimorfnosti). □

Věta 4.33 (Hodnost složeného zobrazení)**.** *Nechť P, Q, V jsou vektorové prostory nad tělesem T a nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $A \in \mathcal{L}(Q, V)$. Pak platí:*

1. *$h(AB) \leq h(A)$. Je-li navíc B epimorfní, potom $h(AB) = h(A)$.*

2. *$h(AB) \leq h(B)$. Je-li navíc A monomorfní, pak $h(AB) = h(B)$.*

Důkaz.

1. Zřejmá je rovnost $h(AB) = \dim(AB)(P) = \dim A(B(P))$. Protože $B(P) \subset\subset Q$, platí, že $A(B(P)) \subset\subset A(Q)$. Proto $h(AB) \leq \dim A(Q) = h(A)$. Všimněme si, že je-li B „na“ Q, tj. $B(P) = Q$, pak platí rovnost.

2. Podle důsledku 4.28 o dimenzi obrazu podprostoru platí:

   $$h(AB) = \dim A(B(P)) \leq \dim B(P) = h(B).$$

   Je-li A prosté, pak rovnost plyne z věty 4.31. □

Věta 4.34 (Zadání lineárního zobrazení)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze P a $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ jsou libovolné vektory z Q. Potom existuje právě jedno $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňující pro každé $i \in \hat{n}$ vztah $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$.*
Slovy: „Lineární zobrazení je jednoznačně určeno, jsou-li zadány obrazy bazických vektorů.“

Důkaz.

- Existence: Pro každé $\vec{x} \in P$ označme $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a definujme $A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{y}_i$.

  Poté A je zobrazení P do Q a evidentně splňuje $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Zbývá ukázat, že A je lineární.

  Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ a každé $\alpha \in T$ označme $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, pak z linearity souřadnicového izomorfismu víme, že $(\alpha\vec{x} + \vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1+\beta_1 \\ \alpha\alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n+\beta_n \end{pmatrix}$. Odtud dostaneme:

  $$A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta_i)\vec{y}_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{y}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{y}_i = \alpha A\vec{x} + A\vec{y}.$$

- Jednoznačnost: Nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňuje $B\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Potom pro každé $\vec{x} \in P$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, platí díky linearitě B rovnost:

  $$B\vec{x} = B\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{y}_i = A\vec{x}.$$

  Proto $B = A$. □

Úkol 4.35. Ověřte pro lineární zobrazení A z věty 4.34 následující vlastnosti:

(a) Jsou-li vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ LN, pak A je monomorfní.

(b) Je-li $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n]_\lambda = Q$, pak A je epimorfní.

(c) Je-li $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ báze Q, pak A je izomorfní.

Věta 4.36 (Řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\vec{b} \in A(P)$. Pak množina všech řešení $A\vec{x} = \vec{b}$, tedy $A^{-1}(\vec{b})$, má tvar:*

$$A^{-1}(\vec{b}) = \vec{a} + \ker A,$$

kde $\vec{a} \in P$ splňuje $A\vec{a} = \vec{b}$ (takové $\vec{a}$ nazýváme ***partikulárním řešením****).*

Důkaz.

$$\vec{x} \in A^{-1}(\vec{b}) \;\Leftrightarrow\; A\vec{x} = \vec{b} \;\Leftrightarrow\; A\vec{x} = A\vec{a} \;\Leftrightarrow\; A(\vec{x}-\vec{a}) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{x}-\vec{a} \in \ker A \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \in \vec{a}+\ker A.$$

□

Poznámka 4.37. Všimněme si, že předpoklad $\vec{b} \in A(P)$ existenci partikulárního řešení $\vec{a}$ vynucuje. Kdyby nebyl splněn, bylo by pochopitelně $A^{-1}(\vec{b}) = \emptyset$.

Příklad 4.38. Nechť A je zobrazení definované v příkladu 4.15. Už jsme v příkladu 4.23 vyšetřili, že

$$\ker A = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda \quad \text{a} \quad A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda .$$

Tudíž vidíme, že množinu řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ získáme opravdu sčítáním partikulárního řešení se všemi možnými vektory z jádra.

4.3 Druhá věta o dimenzi

Věta 4.39 (2. věta o dimenzi)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T, nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\dim P < +\infty$. Potom*

$$h(A) + d(A) = \dim P.$$

Důkaz. Z důsledku 4.28 plyne, že $h(A) \leq \dim P < +\infty$.

- Je-li $h(A) = 0$, pak $\ker A = P$ a tvrzení věty evidentně platí.
- Je-li $h(A) = k \in \mathbb{N}$, potom existuje $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k)$ báze $A(P)$. Z definice $A(P)$ víme, že existují vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$, pro které $\vec{y}_i = A\vec{x}_i$. Označme $\tilde{P} = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda$, pak $\dim \tilde{P} \leq k$. Zároveň podle důsledku 4.28 platí:

  $$k = \dim A(P) = \dim A(\tilde{P}) \leq \dim \tilde{P}.$$

  Tudíž $\dim \tilde{P} = k$. Ukažme, že $\ker A$ je doplněk $\tilde{P}$ do P, tj.

  $$P = \tilde{P} \oplus \ker A. \tag{2}$$

  Poté bude jasné, že $\dim P = k + d(A) = h(A) + d(A)$. Tedy zbývá ukázat dvě věci:

(a) $\tilde{P} + \ker A = P$, tj. pro každé $\vec{x} \in P$ existuje $\vec{p} \in \tilde{P}$ a $\vec{q} \in \ker A$ tak, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Jelikož $A\vec{x} \in A(P)$ a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k)$ je báze $A(P)$, existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T$ taková, že $A\vec{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{y}_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i$. Položíme $\vec{p} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{q} = \vec{x} - \vec{p}$. Potom $\vec{p} \in \tilde{P}$. Zbývá ověřit, že $\vec{q} \in \ker A$.

$$A\vec{q} = A\vec{x} - A\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i\right) = A\vec{x} - \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i = A\vec{x} - A\vec{x} = \vec{0}_Q,$$

proto skutečně $\vec{q} \in \ker A$.

(b) Direktnost součtu, tj. $\tilde{P} \cap \ker A = \{\vec{0}_P\}$. Je-li $\vec{x} \in \tilde{P}$, pak existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$. Je-li $\vec{x}$ zároveň z $\ker A$, potom $\vec{0}_Q = A\vec{x} = A(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{y}_i$. Z LN vektorů $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k$ plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \widehat{k}$. Tedy vektor $\vec{x}$ z průniku je nulový. □

Příklad 4.40. Nebudeme uvádět nový příklad, ale nabádáme čtenáře, aby se vrátil k příkladu 4.23, kde jsme vyšetřili jádro a hodnost zobrazení A a B, a zkontroloval, že rovnost z 2. věty o dimenzi pro ně platí.

4.4 Izomorfismus

Definice 4.41. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Řekneme, že P a Q jsou **izomorfními prostory** (píšeme $P \cong Q$), pokud existuje izomorfismus $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

Příklad 4.42. Nechť je dán vektorový prostor V_n nad tělesem T, přičemž $n \in \mathbb{N}$. Pak $V_n \cong T^n$, protože souřadnicový izomorfismus v libovolné bázi zobrazuje V_n na T^n.

Někdy je možné rozhodnout podle dimenze, zda jsou prostory izomorfní.

Věta 4.43 (Izomorfismus prostorů a dimenze)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a nechť alespoň jeden z nich má konečnou dimenzi. Pak $P \cong Q$ právě tehdy, když $\dim P = \dim Q$.*

Důkaz.

- ($\Rightarrow$): Nechť $P \cong Q$, potom existuje izomorfismus $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Z důsledku 4.32 plyne, že $\dim P = h(A) = \dim Q$.

- ($\Leftarrow$): Pokud $\dim P = \dim Q = 0$, pak je zřejmé, že $P \cong Q$. Nechť $\dim P = \dim Q = n \in \mathbb{N}$. Poté existují $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ báze P a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$ báze Q. Z věty 4.34 o zadání lineárního zobrazení víme, že pak existuje právě jedno $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňující $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Ukažme, že toto zobrazení je izomorfní, tj. zbývá dokázat, že je prosté a „na“ Q. (To bylo i předmětem úkolu 4.35.)

(a) A je prosté: Pro libovolný vektor $\vec{x} \in \ker A$, kde $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, platí, že $A\vec{x} = A(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{y}_i = \vec{0}_Q$. Z LN vektorů $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \widehat{n}$, tudíž $\ker A = \{\vec{0}_P\}$ a prostota A plyne z věty 4.29.

(b) A je „na“ Q:

$$A(P) = A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n]_\lambda = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n]_\lambda = Q.$$

□

Důsledek 4.44. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Pokud $P \cong Q$, pak $\dim P = \dim Q$.*

Věta 4.45 (Jednodušší ověření izomorfnosti zobrazení)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T, $\dim P = \dim Q < +\infty$, a nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Potom A je izomorfní, právě když A je monomorfní nebo A je epimorfní.*

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$) je zřejmá. Ověřujeme tedy pouze ($\Leftarrow$):

- Je-li A monomorfní, pak $d(A) = 0$ a z 2. věty o dimenzi plyne, že $h(A) = \dim P$. Protože $\dim P = \dim Q$, máme $h(A) = \dim A(P) = \dim Q$ a zároveň $A(P) \subset\subset Q$. Podle věty 3.6 o vlastnostech podprostorů platí, že $A(P) = Q$, což znamená, že A je „na“ Q.
- Je-li A epimorfní, pak $A(P) = Q$, tudíž $h(A) = \dim Q$. Protože $\dim Q = \dim P$, dostáváme z 2. věty o dimenzi, že $d(A) = 0$, tedy $\ker A = \{\vec{0}_P\}$ a A je prosté. □

Poznámka 4.46. Speciálně pro lineární operátory $A \in \mathcal{L}(P)$ na prostorech konečné dimenze předchozí věta říká, že jsou-li prosté, potom už jsou automaticky „na“ P, a jsou-li „na“ P, pak jsou automaticky prosté.

Věta 4.47 (Izomorfismus doplňků)**.** ★ *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $P, Q, R \subset\subset V$ nad T. Pokud $P \oplus Q = P \oplus R$, potom $Q \cong R$.*

Důkaz. Definujme $A\colon Q \to R$ pro každé $\vec{q} \in Q$ jako $A\vec{q} = \vec{r}$, pokud $\vec{q} = \vec{p} + \vec{r}$, kde $\vec{p} \in P$ a $\vec{r} \in R$. Díky direktnosti součtu je A opravdu zobrazení. Zbývá ověřit, že A je izomorfismus.

- A je lineární:
  Je-li $\alpha \in T, \vec{q}_1, \vec{q}_2 \in Q$, kde $\vec{q}_1 = \vec{p}_1 + \vec{r}_1$, přičemž $\vec{p}_1 \in P$, $\vec{r}_1 \in R$, a $\vec{q}_2 = \vec{p}_2 + \vec{r}_2$, přičemž $\vec{p}_2 \in P$, $\vec{r}_2 \in R$, pak $\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = (\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + (\alpha\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$. Proto $A(\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2) = \alpha\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \alpha A\vec{q}_1 + A\vec{q}_2$.
- A je prosté:
  Uvažujme $\vec{q} \in \ker A$. Poté $A\vec{q} = \vec{0}$, což podle definice A znamená, že $\vec{q} \in P$. Tudíž $\vec{q} \in P \cap Q = \{\vec{0}\}$.

- A je „na“ R:
  Je-li $\vec{r} \in R$, pak existuje právě jedno $\vec{p} \in P$ a právě jedno $\vec{q} \in Q$ tak, že $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$. Položme $\vec{q} = -\vec{p} + \vec{r}$. Našli jsme tím $\vec{q} \in Q$ tak, že $A\vec{q} = \vec{r}$. □

4.5 Doplněk na prostoru nekonečné dimenze ★

Nyní již máme v ruce aparát, který nám umožní částečně vyšetřit i doplňky podprostorů v prostorech nekonečné dimenze. Zatímco věta 3.23 říká, že doplněk ke každému podprostoru vektorového prostoru konečné dimenze existuje, odpověď na otázku, zda má každý podprostor vektorového prostoru nekonečné dimenze doplněk, odložíme až do předmětu Funkcionální analýza. Zde si pouze ukážeme, že i podprostory prostorů nekonečné dimenze mají dobře definovanou kodimenzi, a vyslovíme důležitou větu o vztahu hodnosti a kodimenze jádra.

Rozšiřme tedy definici doplňku i pro podprostory vektorových prostorů nekonečné dimenze.

Definice 4.48. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $P \subset\subset V$. Nechť $Q \subset\subset V$ splňuje $P \oplus Q = V$. Potom Q nazveme **doplňkem** P do V a jeho dimenzi $\dim Q$ značíme $\operatorname{codim} P$ a nazýváme **kodimenzí** P.

Poznámka 4.49. Korektnost definice kodimenze plyne z věty 4.47 a důsledku 4.44.

Příklad 4.50. Uveďme příklad podprostoru nekonečné dimenze s doplňkem konečné dimenze. Nechť $P_1 \subset\subset \mathcal{P}$ a P_1 je tvořeno polynomy s nulovým konstantním členem. Pak $Q_1 = [e_1]_\lambda$ je doplněk P_1 do $\mathcal{P}$.

Příklad 4.51. Uveďme příklad podprostoru nekonečné dimenze s doplňkem nekonečné dimenze. Nechť $P_2 \subset\subset \mathcal{P}$ a P_2 je tvořeno polynomy s nulovými koeficienty u lichých mocnin proměnné. Potom Q_2 tvořené polynomy s nulovými koeficienty u sudých mocnin je doplněk P_2 do $\mathcal{P}$.

Věta 4.52 (Hodnost a kodimenze jádra)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $h(A) < +\infty$. Potom platí:*

$$h(A) = \operatorname{codim} \ker A.$$

Důkaz.

- Je-li $h(A) = 0$, pak $A = \Theta$. Zřejmě tedy platí, že $P = \ker A \oplus \{\vec{0}_P\}$ a $\operatorname{codim} \ker A = 0$.

- Je-li $h(A) \in \mathbb{N}$, potom podprostor $\tilde{P}$ o dimenzi rovné $h(A)$ z důkazu 2. věty o dimenzi je doplňkem $\ker A$ do P. (Důkaz tohoto faktu totiž na konečnosti dimenze P nezávisel.) Jelikož již víme, že kodimenze je dobře definovaná na prostorech libovolné dimenze, dostáváme, že $\operatorname{codim} \ker A = h(A)$. □

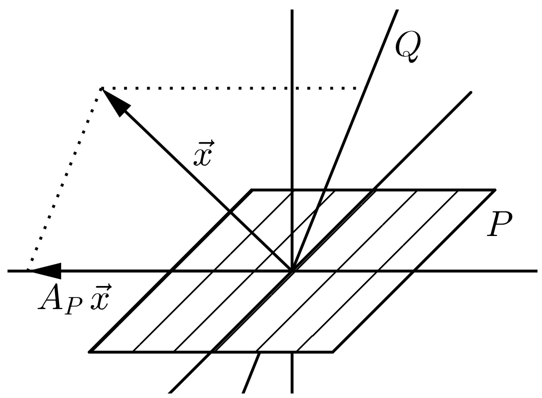
4.6 Projektor ★

Definice 4.53. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $P, Q \subset\subset V$. Nechť dále $P \oplus Q = V$. Definujme $A_P : V \to P$ jako $A_P\vec{x} := \vec{p}$, kde $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$, přičemž $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$. Zobrazení A_P nazýváme **projektorem** na podprostor P podle podprostoru Q. (Viz obrázek 9.)

Věta 4.54 (Projektor)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $P, Q \subset\subset V$. Nechť dále $P \oplus Q = V$. Pak projektor A_P z definice 4.53 splňuje:*

1. $A_P \in \mathcal{L}(V, P)$.
2. $A_P\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} \in P$.
3. $A_P\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in Q$.
4. A_P *je „na“* P a $\ker A = Q$.

Důkaz. Fakt, že A_P je zobrazení, plyne z direktnosti součtu. Ověřme linearitu A_P. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a $\alpha \in T$. Pokud $\vec{x} = \vec{p}_1 + \vec{q}_1$, kde $\vec{p}_1 \in P$ a $\vec{q}_1 \in Q$, a $\vec{y} = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$, kde $\vec{p}_2 \in P$ a $\vec{q}_2 \in Q$, potom $\alpha\vec{x} + \vec{y} = (\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + (\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2)$. Dostáváme $A_P\vec{x} = \vec{p}_1$, $A_P\vec{y} = \vec{p}_2$ a $A_P(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \alpha A_P\vec{x} + A_P\vec{y}$. Zbylé vlastnosti plynou bezprostředně z definice projektoru. $\square$



Obrázek 9: Projektor na P podle Q.

Poznámka 4.55. Symbol A_P neurčuje projektor jednoznačně. Doplňků podprostoru P může existovat více a projektor A_P závisí i na volbě doplňku.

Úkol 4.56. * Dokažte známou vlastnost projektorů: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$. Potom A je projektor na $A(V)$ podle $\ker A$ právě tehdy, když $A^2 = A$. (Přičemž A^2 je zkrácený zápis složeného zobrazení $A \circ A$.)

Příklad 4.57. Uveďme příklad projektoru na prostoru nekonečné dimenze. Ilustrujme pro něj platnost rovnosti $A^2 = A$. Nechť $P_1 \subset\subset \mathcal{P}$ a P_1 obsahuje polynomy s nulovým konstantním členem. Poté už z příkladu 4.50 víme, že $Q_1 = [e_1]_\lambda$ je doplněk P_1 do $\mathcal{P}$. Projektor na P_1 podle Q_1 splňuje pro každé $p \in \mathcal{P}$, kde $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$, že $(A_{P_1} p)(t) = \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Je tedy zřejmé, že $A_{P_1}^2 = A_{P_1}$.

4.7 Duální báze ★

V této kapitole zavzpomínáme na asistenta Pytlíčka, který měl následující větu o duální bázi označenou ve skriptech i na přednášce jako Větu 20. Byla podle něj zlomovým přechodem k abstraktnímu myšlení.

Věta 4.58 (Věta 20)**.** *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T. Potom $\mathcal{X}^\# := (x_1^\#, x_2^\#, \ldots, x_n^\#)$ je báze $V^\#$ a pro každé $\varphi \in V^\#$ platí:*

$$(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}_1) \\ \varphi(\vec{x}_2) \\ \vdots \\ \varphi(\vec{x}_n) \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Nejprve ověříme, že $\mathcal{X}^\#$ je báze $V^\#$.

- Funkcionály (vektory duálního prostoru) $x_1^\#, x_2^\#, \ldots, x_n^\#$ jsou LN:
  Nechť pro $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ platí, že $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^\# = \Theta$, poté pro každé $\vec{y} \in V$ máme podle definice sčítání zobrazení a násobení zobrazení číslem:

  $$(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^\#)(\vec{y}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^\#(\vec{y}) = 0.$$

  Dosadíme-li za vektor $\vec{y}$ postupně všechny bazické vektory $\vec{x}_i$, dostaneme podle věty 2.58 pro každé $i \in \hat{n}$:

  $$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^\#(\vec{x}_i) = \alpha_i = 0.$$

- Funkcionály $x_1^\#, x_2^\#, \ldots, x_n^\#$ generují $V^\#$:
  Nechť $\varphi \in V^\#$ a nechť $\vec{y} \in V$. Označme $\alpha_i = x_i^\#(\vec{y})$. Potom díky linearitě φ máme:

  $$\begin{aligned} \varphi(\vec{y}) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\vec{x}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi(\vec{x}_i)\alpha_i = \sum_{i=1}^n \varphi(\vec{x}_i) x_i^\#(\vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^n \varphi(\vec{x}_i) x_i^\#\right)(\vec{y}), \end{aligned}$$

  kde poslední rovnost vychází z definice sčítání zobrazení a násobení zobrazení číslem. Vidíme tak, že $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(\vec{x}_i) x_i^\#$.

Tvrzení o souřadnicích $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}_1) \\ \varphi(\vec{x}_2) \\ \vdots \\ \varphi(\vec{x}_n) \end{pmatrix}$ plyne z předchozího bodu. □

Definice 4.59. Bázi $\mathcal{X}^\#$ z předchozí věty nazýváme **duální bází** k $\mathcal{X}$.

Vraťme se na závěr kapitoly k motivačnímu textu. Definovali jsme v něm obyčejnou lineární diferenciální rovnicí řádu n:

$$f^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)f'(x) + p_0(x)f(x) = q(x), \tag{3}$$

přičemž $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, q$ jsou spojité funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Řešit takovou rovnici znamená nalézt všechny reálné funkce f splňující rovnost (3) pro každé x z intervalu I. Definujme pro každé $x \in I$:

$$(Af)(x) \coloneqq f^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)f'(x) + p_0(x)f(x).$$

Pak lze ukázat, že A je lineární zobrazení $\mathcal{C}^{(n)}(I) \to \mathcal{C}(I)$, kde $\mathcal{C}^{(n)}(I)$ je vektorový prostor funkcí se spojitými derivacemi až do řádu n na intervalu I a $\mathcal{C}(I)$ je vektorový prostor funkcí spojitých na I. Strukturu řešení rovnice (3) proto popisuje věta 4.36. Vždy bude tvaru $a + [f_1, f_2, \ldots, f_n]_\lambda$, přičemž a je funkce, která řeší rovnici (3), zatímco $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jsou LN řešení rovnice (3) po vynulování pravé strany (tj. místo $q(x)$ si představujeme 0).

Ilustrujme na obyčejné lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty konkrétní tvar množiny řešení. Nechť je dána rovnice:

$$f'''(x) - 4f''(x) + 5f'(x) - 2f(x) = -8\mathrm{e}^x.$$

Potom množina řešení (ověřte dosazením, že jde o řešení) je tvaru:

$$a + [f_1, f_2, f_3]_\lambda,$$

kde $a(x) = 4x^2\mathrm{e}^x,\ f_1(x) = \mathrm{e}^x,\ f_2(x) = x\mathrm{e}^x,\ f_3(x) = \mathrm{e}^{2x}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Zakončeme partii o lineárních zobrazeních opět slovy asistenta Pytlíčka (tentokrát budou povzbudivá): „Kapitolou lineárních zobrazení abstrakce předmětu LA vyvrcholila a teď už půjdeme jenom dolů.“