2 Vektorový prostor

Axiomatická definice vektorového prostoru, kterou v této kapitole vyslovíme, je velmi abstraktní. Aby čtenáře neodradila, je připojena v dodatku skript kapitola o historii lineární algebry. V ní je vysvětleno, že lineární algebra se učí „proti toku času“ a že vrcholem veškeré abstrakce je právě pojem vektorového prostoru. Tedy hlavu vzhůru, po prokousání se touto kapitolou už bude vše jen jednodušší a jednodušší...

Motivace. Vektorový prostor vás bude provázet celým studiem. Jde totiž o naprosto přirozenou strukturu, jejíž vlastnosti splňuje celá řada tříd známých objektů: vektory z „našeho“ třídimenzionální světa, matice, polynomy, funkce, posloupnosti, ale také například některé matematické hříčky. Jeden takový křížovkářský příklad uveďme: *Popište množinu všech latinských čtverců, tj. matic o třech řádcích a třech sloupcích takových, že součty ve všech řádcích i ve všech sloupcích se rovnají.*

K úloze se vrátíme na konci kapitoly a podíváme se na její souvislost s pojmem vektorový prostor.

2.1 Definice vektorového prostoru

Ústředním objektem lineární algebry je vektorový prostor. Uveďme nejprve dva pojmy, které budeme v jeho definici využívat.

Definice 2.1. Kartézským součinem množin A a B nazveme množinu uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A, b \in B$, tj.

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$ [5]

Zobrazením $f\colon A \to B$ je taková podmnožina $A \times B$, pro niž platí:

$$((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f) \;\Rightarrow\; b = c.$$

Místo $(a, b) \in f$ obvykle píšeme $f(a) = b$. V celých skriptech navíc budeme pod zápisem $f\colon A \to B$ rozumět, že f zobrazuje A do B, tj. definiční obor f je celá množina A a obor hodnot f je podmnožinou B.

Definice 2.2. Číselným tělesem nazveme každou množinu $T \subset \mathbb{C}$, která má alespoň dva prvky a splňuje pro každé $\alpha, \beta \in T$:

1. $\alpha + \beta \in T$ (uzavřenost T na sčítání).

2. $\alpha \cdot \beta \in T$ (uzavřenost T na násobení).

[5] Množinový zápis není jednotný. V matematické litaratuře je momentálně asi nejčastější zápis $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ a objevuje se také $\{(a, b); a \in A, b \in B\}$.

3. $-\alpha \in T$ (uzavřenost T vůči opačnému prvku).

4. Pokud $\alpha \neq 0$, potom $\frac{1}{\alpha} \in T$ (uzavřenost T vůči převrácené hodnotě).

Pojem tělesa je v algebře definován mnohem obecněji, viz například [1]. [6] Ve vyšších ročnících budou poznatky z lineární algebry zobecněny i pro vektorové prostory nad obecnými tělesy. My se ale omezíme výhradně na číselná tělesa, a i když v dalším textu budeme pro úsporu místa psát těleso, máme vždy na mysli číselné těleso. Uvidíme, že i tak jde o bohatou třídu a že se v některých kapitolách zejména v letním semestru budou objekty lineární algebry chovat jinak nad různými číselnými tělesy a my budeme nuceni pracovat s číselnými tělesy velmi opatrně.

Poznámka 2.3. Každé těleso T obsahuje čísla 0 a 1. Podle definice totiž obsahuje T nějaký prvek α. Pak také $-\alpha \in T$ a dále též $\alpha + (-\alpha) = 0 \in T$. Jelikož T obsahuje alespoň dva prvky, určitě obsahuje nějaké $\alpha \neq 0$. Tedy také $\frac{1}{\alpha} \in T$ a dále rovněž $\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1 \in T$.

Poznámka 2.4. Zamysleme se nad tím, které množiny (ne)tvoří těleso.

- Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ netvoří těleso, neboť například $3 \in \mathbb{N}$, ale $-3 \notin \mathbb{N}$.
- Množina celých čísel $\mathbb{Z}$ netvoří těleso, protože například $2 \in \mathbb{Z}$, ale $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ tvoří těleso. Je to nejmenší těleso ve smyslu inkluze, tj. $\mathbb{Q}$ je podmnožinou každého číselného tělesa.
- Množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ a komplexních čísel $\mathbb{C}$ tvoří tělesa. [7] V příkladech budeme právě s těmito tělesy pracovat nejčastěji.

Úkol 2.5. Ověřte, že množina čísel $\{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ tvoří číselné těleso.

Definice 2.6. Nechť jsou dány:

(a) číselné těleso T (prvky nazýváme **čísly**), [8]

(b) neprázdná množina V (prvky nazýváme **vektory**),

(c) zobrazení $\oplus\colon V \times V \to V$ (hovoříme o **sčítání vektorů**),

(d) zobrazení $\odot\colon T \times V \to V$ (hovoříme o **násobení vektoru číslem**).

Řekneme, že V je **vektorovým prostorem** nad tělesem T s operacemi $\oplus$ a $\odot$, pokud je splněno následujících osm podmínek (nazýváme je **axiomy vektorového prostoru**):

[6] V anglických, ale i některých českých textech se používá pro těleso symbol F ze slova field, což je anglický výraz pro těleso (ač doslovný překlad je pole).

[7] V literatuře se vyskytují i jiné symboly. Například $R, \mathbf{R}, \mathcal{R}$ pro reálná čísla a K nebo $\mathbf{C}$ či $\mathcal{C}$ pro komplexní čísla.

[8] Pro prvek tělesa se užívá i termín skalár.

1. Pro každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$ platí, že $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$ (**komutativní zákon** pro $\oplus$).
2. Pro každé $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ platí, že $\vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c}) = (\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c}$ (**asociativní zákon** pro $\oplus$).
3. Existuje $\vec{b} \in V$ takové, že pro každé $\vec{a} \in V$ platí, že $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{a}$ (vektor $\vec{b}$ s touto vlastností nazýváme **nulovým** a značíme $\vec{0}$).
4. Pro každé $\vec{a} \in V$ existuje $\vec{b} \in V$ takové, že $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{0}$ (vektor $\vec{b}$ s touto vlastností nazýváme **opačným** k vektoru $\vec{a}$ a značíme $-\vec{a}$).
5. Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí, že $(\alpha \cdot \beta) \odot \vec{a} = \alpha \odot (\beta \odot \vec{a})$ (**asociativní zákon** pro $\odot$).
6. Pro každé $\vec{a} \in V$ platí, že $1 \odot \vec{a} = \vec{a}$.
7. Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí, že $(\alpha + \beta) \odot \vec{a} = (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\beta \odot \vec{a})$ (**distributivita** $\odot$ vzhledem ke sčítání čísel).
8. Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$ platí, že $\alpha \odot (\vec{a} \oplus \vec{b}) = (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\alpha \odot \vec{b})$ (**distributivita** $\odot$ vzhledem ke sčítání vektorů).

Poznamenejme, že asociativita $\odot$ není asociativitou v pravém slova smyslu. Má totiž jít o vlastnost jedné binární operace na dané množině, zatímco zde se míchají dvě různé operace, a to násobení čísel a násobení vektoru číslem. Podobně distributivita $\odot$ vzhledem ke sčítání čísel ani vzhledem ke sčítání vektorů není pravá distributivita. Ta má svazovat dvě binární operace na téže množině.

Poznámka 2.7. Znovu zdůrazněme, že vektorový prostor je řádně definován, jsou-li dány čtyři objekty:

(a) neprázdná množina vektorů V, [9]

(b) číselné těleso T,

(c) operace $\oplus$,

(d) operace $\odot$.

Zároveň musejí být samozřejmě splněny všechny axiomy. Někdy vektorový prostor značíme podrobněji $(V, T, \oplus, \odot)$.

Poznámka 2.8. V případě $T = \mathbb{R}$ hovoříme o **reálném vektorovém prostoru** a v případě $T = \mathbb{C}$ o **komplexním vektorovém prostoru**.

[9] Objevuje se i značení $\mathbb{V}$ nebo $\mathcal{V}$ a častý je i název lineární prostor.

V definici jsme důsledně rozlišovali operace $\oplus$ pro sčítání vektorů, $+$ pro sčítání čísel, $\odot$ pro násobení vektoru číslem, $\cdot$ pro násobení čísel. V dalším textu už obvykle nebudeme rozlišovat mezi symboly $\oplus$ a $+$. Z kontextu bude totiž vždy jasné, zda jde o sčítání ve V, nebo v T. Dále nebudeme rozlišovat mezi symboly $\odot$ a $\cdot$, ba dokonce je obvykle budeme vynechávat. Je-li $\alpha, \beta \in T$ a $\vec{a} \in V$, potom budeme často psát $\alpha\beta$ místo $\alpha \cdot \beta$ a $\alpha\vec{a}$ místo $\alpha \odot \vec{a}$. Symbol ponecháme pouze tam, kde usnadní pochopení.

Poznámka 2.9. Prvky tělesa budeme značit obvykle (ne však výlučně) řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \ \ldots$ a vektory obvykle písmeny ze začátku a konce abecedy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. [10] Šipku nad vektory vynecháme jen výjimečně, například v případech vektorů z prostoru polynomů, matic či lineárních zobrazení, kde se ustálilo jiné značení.

Věta 2.10 (Vlastnosti vektorového prostoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Potom platí:*

1. *Ve V existuje právě jeden nulový vektor $\vec{0}$.*

2. *Ke každému vektoru z V existuje právě jeden opačný vektor.*

3. *Pro každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$ existuje právě jedno řešení rovnice $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$, a to $\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b}$.*

4. *Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí:*
$$\alpha\vec{0} = \vec{0} = 0\vec{a}.$$

5. *Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí implikace:*
$$\alpha\vec{a} = \vec{0} \ \Rightarrow \ (\vec{a} = \vec{0} \vee \alpha = 0).$$

6. *Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí:*
$$-(\alpha\vec{a}) = (-\alpha)\vec{a} = \alpha(-\vec{a}).$$

Důkaz. ★

1. Podle třetího axiomu obsahuje V nulový vektor $\vec{0}$. Pokud $\vec{z} \in V$ také splňuje vlastnosti nulového vektoru, potom dostáváme užitím axiomů vektorového prostoru:
$$\begin{aligned} \vec{z} &= \vec{z} + \vec{0} && \text{(třetí axiom – o nulovém vektoru)} \\ &= \vec{0} + \vec{z} && \text{(první axiom – komutativní zákon)} \\ &= \vec{0} && \text{(třetí axiom – o nulovém vektoru).} \end{aligned}$$

[10] V literatuře i během studia se setkáte s rozmanitým značením vektorů: kromě $\vec{x}$ také $x, \overline{x}, \mathbf{x}, \vec{\mathbf{x}}$ atd.

2. Nechť $\vec{a}$ je libovolný vektor z V. Podle čtvrtého axiomu k němu existuje opačný vektor $-\vec{a}$. Pokud $\vec{b} \in V$ také splňuje vlastnosti vektoru opačného k $\vec{a}$, pak máme:

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= \vec{b} + \vec{0} && \text{(třetí axiom – o nulovém vektoru)}\\
&= \vec{b} + (\vec{a} + (-\vec{a})) && \text{(čtvrtý axiom – o opačném vektoru)}\\
&= (\vec{b} + \vec{a}) + (-\vec{a}) && \text{(druhý axiom – asociativní zákon)}\\
&= (\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{a}) && \text{(první axiom – komutativní zákon)}\\
&= \vec{0} + (-\vec{a}) && \text{(čtvrtý axiom – o opačném vektoru)}\\
&= (-\vec{a}) + \vec{0} && \text{(první axiom – komutativní zákon)}\\
&= -\vec{a} && \text{(třetí axiom – o nulovém vektoru).}
\end{aligned}$$

3. Nejprve se přesvědčíme, že $-\vec{a} + \vec{b}$ je řešením:

$$\vec{a} + (-\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{b} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}.$$

Pokud $\vec{y} \in V$ je také řešením, potom získáváme:

$$\begin{aligned}
-\vec{a} + \vec{b} &= -\vec{a} + (\vec{a} + \vec{y}) && \text{($\vec{y}$ je řešením)}\\
&= (-\vec{a} + \vec{a}) + \vec{y} && \text{(druhý axiom – asociativní zákon)}\\
&= (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{y} && \text{(první axiom – komutativní zákon)}\\
&= \vec{0} + \vec{y} && \text{(čtvrtý axiom – o opačném vektoru)}\\
&= \vec{y} + \vec{0} && \text{(první axiom – komutativní zákon)}\\
&= \vec{y} && \text{(třetí axiom – o nulovém vektoru).}
\end{aligned}$$

4. Z předchozího bodu víme, že pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ má rovnice $\alpha\vec{a} + \vec{x} = \alpha\vec{a}$ jediné řešení, a to $\vec{x} = \vec{0}$. Ověřme, že také $\alpha\vec{0}$ a $0\vec{a}$ jsou řešeními. Poté bude jasné, že jsou rovny $\vec{0}$.

$$\alpha\vec{a} + \alpha\vec{0} \overset{\text{(a)}}{=} \alpha(\vec{a} + \vec{0}) \overset{\text{(b)}}{=} \alpha\vec{a}.$$

$$\alpha\vec{a} + 0\vec{a} \overset{\text{(c)}}{=} (\alpha + 0)\vec{a} = \alpha\vec{a}.$$

Využili jsme (a) osmý axiom – distributivitu $\odot$ vzhledem ke sčítání vektorů, (b) třetí axiom – o nulovém vektoru, (c) sedmý axiom – distributivitu $\odot$ vzhledem ke sčítání čísel.

5. Nechť $\alpha\vec{a} = \vec{0}$. Podle čtvrtého bodu může být $\alpha = 0$. Když je $\alpha \neq 0$, pak platí:

$$\vec{a} \overset{\text{(a)}}{=} 1\vec{a} = \left(\tfrac{1}{\alpha}\alpha\right)\vec{a} \overset{\text{(b)}}{=} \tfrac{1}{\alpha}(\alpha\vec{a}) \overset{\text{(c)}}{=} \tfrac{1}{\alpha}\vec{0} \overset{\text{(d)}}{=} \vec{0}.$$

Využili jsme (a) šestý axiom, (b) pátý axiom – asociativní zákon pro $\odot$, (c) předpoklad, že $\alpha\vec{a} = \vec{0}$, (d) už dokázaný čtvrtý bod.

6. Ze třetího bodu plyne, že rovnice $\alpha\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ má jediné řešení, a to $\vec{x} = -(\alpha\vec{a})$. Ověříme-li, že také $(-\alpha)\vec{a}$ a $\alpha(-\vec{a})$ jsou řešeními, potom bude jasné, že jsou rovny $-(\alpha\vec{a})$.
$$\alpha\vec{a} + (-\alpha)\vec{a} \overset{(a)}{=} (\alpha + (-\alpha))\vec{a} = 0\vec{a} \overset{(b)}{=} \vec{0}.$$
$$\alpha\vec{a} + \alpha(-\vec{a}) \overset{(c)}{=} \alpha(\vec{a} + (-\vec{a})) \overset{(d)}{=} \alpha\vec{0} \overset{(e)}{=} \vec{0}.$$
Využili jsme (a) sedmý axiom – distributivitu $\odot$ vzhledem ke sčítání čísel, (b) už dokázaný čtvrtý bod, (c) osmý axiom – distributivitu $\odot$ vzhledem ke sčítání vektorů, (d) čtvrtý axiom – o opačném vektoru, (e) čtvrtý bod. □

Důkaz věty 2.10 se asi v první chvíli zdá obtížný, ale není třeba se lekat. Úkolem prvního semestru je naučit studenty dokazovací techniky a v jeho průběhu už bude zřejmé, že důkazy v lineární algebře jsou bez triků, přímočaré, a tudíž vlastně velmi jednoduché.

Poznámka 2.11. Až z věty 2.10 plyne, že mělo smysl zavést speciální symbol pro nulový a opačný vektor, protože jsou to jedinečné objekty.

Důsledek 2.12. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T s operacemi $\oplus$ a $\odot$. Nechť V_1 je neprázdná podmnožina V. Nechť jsou navíc splněny následující dvě podmínky:*

1. *Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_1$ je $\vec{x} \oplus \vec{y} \in V_1$.*
2. *Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in V_1$ je $\alpha \odot \vec{x} \in V_1$.*

Potom V_1 je také vektorovým prostorem nad tělesem T (při zúžení operací $\oplus$ na $V_1 \times V_1$ a $\odot$ na $T \times V_1$).

Důkaz. Množina V_1 je podle předpokladů neprázdná a uzavřená na operace. Zbývá ověřit axiomy:

- Ve V_1 existuje nulový vektor: Ukažme, že nulový vektor $\vec{0}$ z V hraje roli nulového vektoru ve V_1. Vezměme libovolný vektor $\vec{x} \in V_1 \subset V$. Poté s využitím čtvrtého bodu věty 2.10 máme $\vec{0} = 0\vec{x}$ a z uzavřenosti V_1 na násobení číslem dostáváme $0\vec{x} \in V_1$. Proto $\vec{0}$ patří do V_1. Jelikož rovnost $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ platí pro všechny vektory $\vec{a} \in V$, platí také pro všechny vektory $\vec{a} \in V_1 \subset V$. Podle definice 2.6 je tedy $\vec{0}$ nulovým vektorem ve V_1.

- Ke každému vektoru $\vec{x} \in V_1$ existuje ve V_1 opačný vektor: Ukažme, že opačný vektor $-\vec{x}$ z V hraje roli opačného vektoru k $\vec{x}$ ve V_1. Podle šestého bodu věty 2.10 a uzavřenosti V_1 na násobení číslem platí, že $-\vec{x} = (-1)\vec{x} \in V_1$. Protože $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$, je $-\vec{x}$ podle definice 2.6 opačným vektorem k $\vec{x}$ ve V_1.

- Všechny ostatní axiomy platí pro všechny vektory z V, tím spíše platí i pro všechny vektory z $V_1 \subset V$. □

Poznámka 2.13. Posviťme si na problém, kolik vektorů může obsahovat vektorový prostor. Jistě obsahuje alespoň jeden vektor $\vec{x}$, protože předpokládáme neprázdnost V. Může obsahovat pouze jeden vektor? Ano. Definujeme-li operace $\vec{x}+\vec{x}=\vec{x}$ a $\alpha\vec{x}=\vec{x}$ pro každé $\alpha \in T$, pak $V=\{\vec{x}\}$ tvoří vektorový prostor nad tělesem T. Vektor $\vec{x}$ ve V hraje úlohu nulového vektoru, proto můžeme psát $V=\{\vec{0}\}$. Tento prostor nazýváme **nulovým vektorovým prostorem**.

Může mít nenulový vektorový prostor konečný počet vektorů? Nemůže. Existuje-li ve V vektor $\vec{x}\neq\vec{0}$, potom také $2\vec{x},3\vec{x},4\vec{x},\ \ldots$ patří do V. Tyto vektory jsou vzájemně různé, protože pro $m\neq n$ platí podle věty 2.10, že $m\vec{x}-n\vec{x}=(m-n)\vec{x}\neq\vec{0}$.

2.2 Příklady vektorových prostorů

Příklad 2.14.

- Nechť T je těleso.
- Nechť $n\in\mathbb{N}$. Položme $V=T^n$, kde T^n je množina uspořádaných n-tic čísel z tělesa zapsaných do sloupců, tj.

$$T^n := \left\{ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{n} \right\}.$$ [11]

  Číslo a_i nazýváme i-tou **složkou** vektoru $\vec{a}$. [12]

- Operaci sčítání definujeme „po složkách“:

  Pro každé $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\in T^n$ a $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in T^n$ definujeme $\vec{a}\oplus\vec{b}:=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$.

- Operaci násobení vektoru číslem definujeme „po složkách“:

  Pro každé $\alpha\in T$ a každé $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\in T^n$ definujeme $\alpha\odot\vec{a}:=\begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$.

- Úlohu nulového vektoru hraje vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

[11] Ovšem zhruba polovina matematiků dává přednost řádkovému zápisu vektorů z T^n.

[12] Pro označení i-té složky vektoru $\vec{a}$ se používá též a^i nebo $a^{(i)}$.

- Opačným vektorem k $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ je vektor $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$.

Necháme na čtenáři, aby sám ukázal, že T^n nad T s operacemi definovanými po složkách splní všechny axiomy, tedy jde o vektorový prostor. [13]

Poznámka 2.15. Značení T^n používáme jak pro množinu uspořádaných n-tic čísel z tělesa, tak pro vektorový prostor T^n, tj. čtveřici $(T^n, T, \oplus, \odot)$. Je třeba podle kontextu rozlišit, o který případ jde.

V zápisu vektorů z prostoru T^n nepanuje jednotnost. My se budeme držet sloupcového zápisu, ale zavzpomínejme zde na asistenta Pytlíčka, který byl skalním přívržencem vektorů zapsaných do řádků. Na jednom cvičení z LAP tak nějaký student začal psát vektory se šipkami a do sloupců a v průběhu příkladu chtěl přejít ke značení používanému panem asistentem (tedy bez šipek a do řádků). Ten ho ale napomenul: „Jak známo, tak já šipky nesnáším. Ale když už jste to začal psát se šipečkami a do sloupečků, no tak to tak musíte psát pořád.“ Budiž čtenáři poučením, že udělá jedině dobře, když i ve svém značení bude především konzistentní.

Příklad 2.16.

- Nechť T je těleso.
- Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Položme $V = T^{m,n}$, kde $T^{m,n}$ je množina uspořádaných mn-tic čísel z T zapsaných do tabulky o m řádcích a n sloupcích a nazývaných **maticemi** typu $m \times n$, [14] tj.

$$T^{m,n} := \left\{ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in T \text{ pro každé } i \in \widehat{m}, j \in \widehat{n} \right\}.$$

Čísla a_{ij} nazýváme **prvky** matice $\mathbb{A}$ (značíme také $\mathbb{A}_{ij}$ nebo $[\mathbb{A}]_{ij}$), i-tým **řádkem** matice $\mathbb{A}$ nazveme n-tici $\mathbb{A}_{i\bullet} := (a_{i1} a_{i2} \dots a_{in})$ a j-tým **sloupcem** matice $\mathbb{A}$ m-tici $\mathbb{A}_{\bullet j} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$. Číslu i říkáme **řádkový** a číslu j **sloupcový index** prvku a_{ij}. [15]

[13] Vektorový prostor T^n se také nazývá aritmetický.

[14] Někdy se též píše typu (m, n) nebo m/n.

[15] Matice se značí například i $\mathbf{A}$ nebo jednoduše A. Pro i-tý řádek a j-tý sloupec matice $\mathbb{A}$ se též používá symbol $\mathbf{r}_i(\mathbb{A})$ a $\mathbf{s}_j(\mathbb{A})$.

- Operaci sčítání definujeme „po prvcích“:
  Pro každé $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{m,n}$ a pro každé $i \in \widehat{m}, j \in \widehat{n}$ definujeme
$$[\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}]_{ij} \coloneqq \mathbb{A}_{ij} + \mathbb{B}_{ij}.$$
- Operaci násobení vektoru číslem definujeme „po prvcích“:
  Pro každé $\alpha \in T$ a $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a pro každé $i \in \widehat{m}, j \in \widehat{n}$ definujeme
$$[\alpha \odot \mathbb{A}]_{ij} \coloneqq \alpha \cdot \mathbb{A}_{ij}.$$
- Úlohu nulového vektoru hraje **nulová matice** $\mathbb{O} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
- Opačným vektorem k $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ je $-\mathbb{A} \coloneqq \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$.

Snadno ověříme, že čtveřice $(T^{m,n}, T, \oplus, \odot)$ splní všechny axiomy. Vidíme tudíž, že $T^{m,n}$ nad T s operacemi definovanými po prvcích je vektorový prostor. Nazýváme jej **prostorem matic** (o m řádcích a n sloupcích).

Poznámka 2.17. Značení $T^{m,n}$ používáme pro množinu matic o m řádcích a n sloupcích s prvky z tělesa i pro vektorový prostor $T^{m,n}$, tedy čtveřici $(T^{m,n}, T, \oplus, \odot)$. Je opět třeba podle kontextu rozlišit, o který případ jde.

Úkol 2.18. Rozmyslete si, že prostory T^n a $T^{n,1}$ jsou totožné.

Pojem matice je v lineární algebře velmi důležitý. Podstatnou část lineární algebry bude tvořit maticový počet. Prozatím vystačíme s maticí jakožto vektorem z $T^{m,n}$. V budoucnu pak zavedeme pro matice i operaci násobení a zejména v letním semestru budeme vyšetřovat různé další vlastnosti matic.

Příklad 2.19. K pochopení tohoto příkladu je vhodné si přečíst Dodatek 1: Polynomy.

- Vezměme těleso $\mathbb{C}$.
- Nechť $V = \mathcal{P}$, což je množina všech polynomů.
- Operaci sčítání vektorů definujeme jako sčítání funkcí, tj. „bodově“:
  Pro každé $p, q \in \mathcal{P}$ definujeme $(p \oplus q)(t) \coloneqq p(t) + q(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
- Operaci násobení vektoru číslem definujeme jako násobek funkce, tj. „bodově“:
  Pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a $p \in \mathcal{P}$ definujeme $(\alpha \odot p)(t) \coloneqq \alpha \cdot p(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

- Úlohu nulového vektoru hraje nulový polynom $\mathcal{O}$ definovaný $\mathcal{O}(t) := 0$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

- Opačným vektorem k $p \in \mathcal{P}$ je opačný polynom definovaný $(-p)(t) := -p(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Čtenář ověří, že čtveřice $(\mathcal{P}, \mathbb{C}, \oplus, \odot)$ splní všechny axiomy. Tedy $\mathcal{P}$ nad $\mathbb{C}$ s operacemi definovanými bodově je vektorový prostor. Nazýváme jej **prostorem polynomů**.

Příklad 2.20. Ponechme vše definované stejně jako v prostoru polynomů, pouze změňme množinu V. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Položme $V = \mathcal{P}_n$, což je množina polynomů stupně maximálně $n - 1$ s přidáním nulového polynomu (který nemá stupeň definovaný). Opět ponecháme k ověření čtenáři, že $(\mathcal{P}_n, \mathbb{C}, \oplus, \odot)$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Radíme využít důsledku 2.12.

V lineární algebře nás nečeká přehnaně mnoho termínů. Naučte se tedy názvosloví správně používat. Rozhodně není na škodu pilovat přesnost vyjadřování, zlepšuje se tím i schopnost úsporně a exaktně formulovat myšlenky. I pan asistent Pytlíček na takovou přesnost dbal. Kdo říkal složka matice nebo prvek vektoru, „vůbec do toho neviděl“!

Příklad 2.21. Pro znázornění prostorů $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ budeme používat orientované šipky. Vysvětleme vizualizaci $\mathbb{R}^2$, v $\mathbb{R}^3$ postupujeme analogicky.

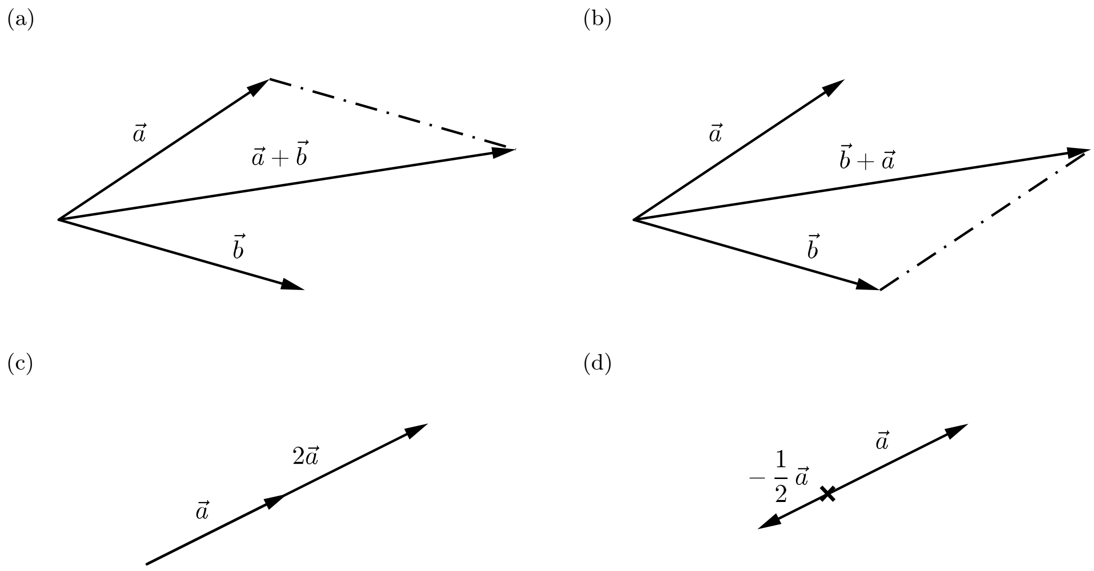
- Tělesem jsou reálná čísla.

- Vektoru $\binom{a_1}{a_2}$ odpovídá šipka začínající v počátku $\binom{0}{0}$ a končící v bodě $\binom{a_1}{a_2}$. Takové šipce se někdy říká **průvodič** bodu $\binom{a_1}{a_2}$.

- Součet $\vec{a} + \vec{b}$ získáme, když do koncového bodu šipky odpovídající $\vec{a}$ umístíme počátek šipky rovnoběžné s šipkou odpovídající $\vec{b}$ a mající stejnou velikost jako šipka odpovídající $\vec{b}$. Tím získáme koncový bod šipky odpovídající $\vec{a} + \vec{b}$. Je zřejmé, že takové sčítání odpovídá sčítání vektorů po složkách, jak jsme je zavedli ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$.

- Vektor $\alpha\vec{a}$ získáme tak, že velikost šipky odpovídající $\vec{a}$ vynásobíme $|\alpha|$. Poté šipku umístíme do počátku a orientaci nezměníme, pokud $\alpha \geq 0$, nebo změníme na opačnou, pokud $\alpha < 0$.

Čtenář si rozmyslí, čemu odpovídají při této vizualizaci axiomy. Komutativní zákon ilustruje první a druhý bod obrázku 1.



Obrázek 1: (a) Součet vektorů $\vec{a}+\vec{b}$. (b) Součet vektorů $\vec{b}+\vec{a}$. (c) $2\vec{a}$. (d) $-\frac{1}{2}\vec{a}$.

Poznámka 2.22. Je lehké nahlédnout, že platí tvrzení: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť T_1 je těleso splňující $T_1 \subset T$. Potom V je při zachování operace $\oplus$ a zúžení operace $\odot$ na $T_1 \times V$ také vektorovým prostorem nad T_1. Například $\mathbb{C}^n$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, pokud jsou operace definovány po složkách. Jde ovšem o jiný vektorový prostor než $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$. Pozor! Naopak to neplatí. Například $\mathbb{R}^n$ při operacích definovaných po složkách netvoří vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

2.3 Lineární kombinace vektorů

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V. Zavedeme symbol pro součet n vektorů:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i := \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n.$$

Nepíšeme závorky, protože – jak si čtenář sám ověří – podle komutativního a asociativního zákona pro sčítání vektorů platí, že nezáleží na uzávorkování ani na pořadí vektorů v sumě. Výsledkem součtu je opět vektor z V, jak plyne z uzavřenosti V na sčítání vektorů.

Definice 2.23. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V. Říkáme, že vektor $\vec{x} \in V$ je **lineární kombinací** (LK) vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, pokud existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i.$$

Čísla α_i pro $i \in \hat{n}$ nazýváme **koeficienty LK**.

- Jestliže $\alpha_i = 0$ pro všechna $i \in \hat{n}$, nazýváme takovou LK **triviální**.
- V opačném případě (tj. když existuje nenulový koeficient) jde o **netriviální** LK.

Je zřejmé, že výsledkem triviální LK je nulový vektor.

Definice 2.24. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V. Množinu všech LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ nazveme **lineárním obalem** (LO) vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ a značíme ji $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, [16] tj.

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \;\middle|\; \text{pro každé } i \in \hat{n} \text{ je } \alpha_i \in T \right\}.$$

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ nazýváme **generátory LO**.

Věta 2.25 (Vlastnosti LO). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V. Potom platí:*

1. $\vec{0} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.
2. *Jestliže $(k_1 k_2 \ldots k_n)$ je permutace množiny $\hat{n}$, potom*

   $$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_{k_1}, \vec{x}_{k_2}, \ldots, \vec{x}_{k_n}]_\lambda.$$

   Slovy: „LO nezávisí na pořadí generátorů.“
3. *Pokud $\vec{x}_{n+1} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak platí, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$.*
   Slovy: „Generátor, který je LK ostatních generátorů, lze z LO vyhodit nebo jej do LO přidat, aniž by se LO změnil.“
4. *Je-li $\vec{x}, \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom $\vec{x} + \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.*
   Slovy: „LO je uzavřený na sčítání vektorů.“
5. *Je-li $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom $\alpha\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.*
   Slovy: „LO je uzavřený na násobení vektoru číslem z T.“
6. *$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ tvoří vektorový prostor nad tělesem T při zúžení operací z V.*

Důkaz.

1. Vyplývá z rovnosti $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} 0\vec{x}_i$.

[16] V literatuře se objevují pro LO i symboly $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \rangle$, $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}_{\text{lin}}$ nebo $L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$. V anglických textech se pak setkáme nejčastěji se symbolem $\text{span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$, přičemž překlad span do češtiny zní rozsah, rozpětí.

2. Tvrzení plyne z rovnosti:
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{k_i} \vec{x}_{k_i},$$
tedy z faktu, že v sumě nezáleží na pořadí vektorů.

3. Rovnost dvou množin se v matematice obvykle dokazuje tak, že se dokáží dvě inkluze. Budeme postupovat také tak.

   - Dokážeme nejprve, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda \subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$, tj. pro libovolný vektor $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ ukážeme, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$.
     Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom podle definice LO existují $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$. Potom ale také platí, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + 0\vec{x}_{n+1}$, a to opět podle definice LO znamená, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$.
   - Zbývá dokázat, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda \subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.
     Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$, pak existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1} \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i$. Upravme rovnost následovně:
     $$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + \alpha_{n+1} \vec{x}_{n+1}.$$
     Teprve nyní využijeme předpoklad, že $\vec{x}_{n+1} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. To podle definice LO znamená, že existují čísla $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in T$ taková, že $\vec{x}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i$. Odtud upravíme dále předcházející rovnost:
     $$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + \alpha_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{n+1} \beta_i) \vec{x}_i.$$
     V poslední úpravě jsme využili axiomy vektorového prostoru. Podle definice LO vidíme, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.

4. Je-li $\vec{x}, \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom existují $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in T$ tak, že
$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \quad \text{a} \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i.$$
Odtud dostáváme díky axiomům vektorového prostoru:
$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \vec{x}_i,$$
což podle definice LO znamená, že $\vec{x} + \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.

5. Je-li $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že
$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i.$$

Poté platí podle axiomů vektorového prostoru:

$$\alpha\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}(\alpha\alpha_i)\vec{x}_i,$$

což podle definice LO znamená, že $\alpha\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.

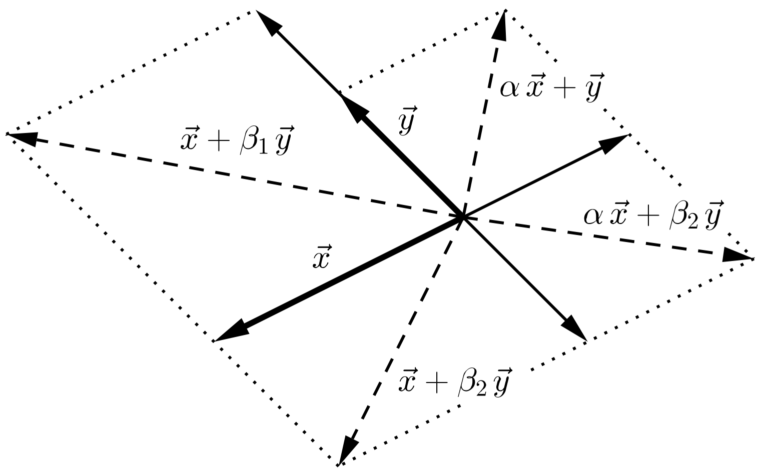
6. Z předchozích dvou bodů víme, že LO je uzavřený na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem z T při zúžení operací z V. Tvrzení pak plyne z důsledku 2.12. $\square$

Příklad 2.26. Podívejme se, jak vypadají LO v $\mathbb{R}^2$.

(a) $\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$ je jediný bod $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

(b) $[\vec{x}]_\lambda$, kde $\vec{x} \neq \vec{0}$, je přímka. Obsahuje totiž právě všechny možné reálné násobky vektoru $\vec{x}$.

(c) $[\vec{x}, \vec{y}]_\lambda$, kde $\vec{x}$ a $\vec{y}$ neleží v jedné přímce, je celá rovina $\mathbb{R}^2$. K získání představy, že každý vektor z $\mathbb{R}^2$ lze psát jako LK vektorů $\vec{x}, \vec{y}$, použijeme vizualizaci $\mathbb{R}^2$ pomocí šipek. Viz obrázek 2.



Obrázek 2: Ukázka, jak různé vektory z $\mathbb{R}^2$ získáváme jako LK vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

2.4 Lineární závislost a nezávislost

Definice 2.27. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V nad tělesem T.

- Řekneme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou **lineárně nezávislé** (LN), pokud

$$(\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T)\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i = \vec{0}\right) \Rightarrow (\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0)\right).$$

Slovy: „LN znamená, že jedině triviální LK vektorů dává nulový vektor."

- Řekneme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou **lineárně závislé** (LZ) v opačném případě, tj. pokud platí negace předchozího výroku:

$$(\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T)\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}\right) \wedge (\exists i \in \hat{n})(\alpha_i \neq 0)\right).$$

Slovy: „LZ znamená, že existuje netriviální LK vektorů rovná nulovému vektoru."

Věta 2.28 (Vlastnosti LN a LZ vektorů)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V. Potom platí:*

1. *Vektor $\vec{x}_1$ je LZ, právě když $\vec{x}_1 = \vec{0}$.*

2. *Pokud je mezi vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ obsažen $\vec{0}$, pak jsou LZ.*

3. *Jsou-li vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ LZ pro nějaké $k \in \hat{n}$, pak i vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LZ.*
   Slovy: „Přidáme-li mezi LZ vektory další vektory, zůstanou LZ."

4. *Pokud $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LN, potom pro každé $k \in \hat{n}$ platí, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou LN.*
   Slovy: „Ponecháme-li z LN vektorů jen některé, zůstanou LN."

5. *„Alternativní definice LZ pro více vektorů"*
   Nechť $n \geq 2$.
   Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LZ $\Leftrightarrow$ $(\exists i_0 \in \hat{n})(\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1} \ldots, \vec{x}_n]_\lambda)$.
   Slovy: „Mezi alespoň dvěma LZ vektory existuje vektor, který je LK ostatních."

6. *„Alternativní definice LZ"*
   Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LZ $\Leftrightarrow$ $(\vec{x}_1 = \vec{0}) \vee (\exists i_0 \in \{2, \ldots, n\})(\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i_0-1}]_\lambda)$.
   Slovy: „Očíslujeme-li LZ vektory, pak je buď první vektor nulový, nebo existuje vektor, který je LK předchozích."

Důkaz.

1. Vektor $\vec{x}_1$ je LZ $\Leftrightarrow$ existuje $\alpha \in T, \alpha \neq 0$, takové, že $\alpha\vec{x}_1 = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_1 = \vec{0}$. Přičemž v poslední ekvivalenci je využit čtvrtý a pátý bod věty 2.10.

2. Nechť $\vec{x}_i = \vec{0}$ pro nějaké $i \in \hat{n}$, potom tvrzení plyne z rovnosti:

$$\vec{0} = 0\vec{x}_1 + \cdots + 1\vec{x}_i + \cdots + 0\vec{x}_n,$$

   tedy z faktu, že $\vec{0}$ dostaneme jako netriviální LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$.

3. Nechť jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ LZ pro nějaké $k \in \hat{n}$. Pak existují $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in T$ tak, že $\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i$ a alespoň jedno α_i je nenulové. Potom ale také platí, že $\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0\vec{x}_i$, což je netriviální LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ dávající $\vec{0}$. Tudíž jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ také LZ.

4. Toto tvrzení plyne z předchozího užitím faktu, že když platí implikace $A \Rightarrow B$, tak platí také implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$.

5. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.

   - ($\Rightarrow$): Předpokládáme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LZ, tudíž podle definice existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že alespoň jedno z nich je nenulové (označme ho α_{i_0}) a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$. Odtud dostaneme:

     $$\alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} = - \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n} \alpha_i \vec{x}_i.$$

     A na závěr máme:

     $$\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n} (-\alpha_i / \alpha_{i_0}) \vec{x}_i.$$

     Tedy podle definice LO dostáváme, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.

   - ($\Leftarrow$): Předpokládáme, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. Podle definice LO existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že

     $$\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n} \alpha_i \vec{x}_i.$$

     Odtud dostáváme $\sum_{i=1, i \neq i_0}^{n} \alpha_i \vec{x}_i - 1\vec{x}_{i_0} = \vec{0}$, což je netriviální LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ rovná $\vec{0}$, proto jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ LZ.

6. Opět dokazujeme dvě implikace.

   - ($\Rightarrow$): Nechť jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ LZ. Pak samozřejmě $\vec{x}_1$ může být nulový. Ošetřeme ještě případ, kdy $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$. Potom z definice LZ plyne, že existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$ a alespoň jedno z čísel je nenulové. Označme $i_0 = \max\{i \in \hat{n} \mid \alpha_i \neq 0\}$. Množina vpravo je neprázdná, protože alespoň jedno z čísel α_i je nenulové. Navíc $i_0 \geq 2$. Kdyby totiž $i_0 = 1$, potom by $\alpha_1 \vec{x}_1 = \vec{0}$. To by byl spor s větou 2.10, podle které plyne z nenulovosti $\vec{x}_1$, že $\alpha_1 = 0$. Odtud dostáváme $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i \vec{x}_i$. Dále máme $\alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} = - \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i$ a na závěr $\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} (-\alpha_i / \alpha_{i_0}) \vec{x}_i$. To podle definice LO znamená, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i_0-1}]_\lambda$.

- ($\Leftarrow$): Nechť $\vec{x}_1 = \vec{0}$, poté podle druhého bodu této věty jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ LZ. Druhá možnost je, že $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ a $\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i$ pro nějaké $i_0 \geq 2$. Pak platí:
$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i + (-1)\vec{x}_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{n} 0\vec{x}_i.$$
Našli jsme netriviální LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ dávající nulový vektor. Proto jsou tyto vektory LZ. □

Úkol 2.29. Rozmyslete si, že dva vektory $\vec{x}, \vec{y}$ jsou LZ, právě když

$$(\exists \alpha \in T)(\vec{x} = \alpha\vec{y} \vee \vec{y} = \alpha\vec{x}).$$

2.5 Báze a dimenze

Definice 2.30. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V nad tělesem T. Nechť $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. Potom vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ nazýváme **generátory** V a říkáme, že $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ **generují** V.

Poznámka 2.31. V případě LO už jsme generátory zaváděli, nazývali jsme tak pro LO $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$. Nyní vidíme, že chápeme-li LO jako vektorový prostor, pak jsme v souladu s novou definicí.

Na rozdíl od definice LK, LO, LN a LZ vektorů a definice generátorů, kde nezáleželo na pořadí vektorů, budeme potřebovat při definici báze vektory uspořádat. Zavedeme proto pojem soubor. [17]

Definice 2.32. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V. Uspořádanou n-tici $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ nazveme **souborem** (n-členným) ve V.

Poznámka 2.33. Ujasněme si řádně rozdíl mezi pojmy soubor a množina vektorů. Zatímco soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je uspořádaná n-tice vektorů (členy souboru se mohou opakovat a záleží na jejich pořadí), v množině vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ se prvky neopakují a na jejich pořadí nezáleží.

Příklad 2.34. Uvažujme prostor $\mathbb{R}^2$, potom

- $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$
- $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$

[17] V literatuře se také vyskytuje název skupina, soustava nebo konečná posloupnost vektorů.

Definice 2.35. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ z V splňují dvě podmínky:

1. Jsou LN.

2. Generují V.

Potom soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ nazveme **bází** V.

Poznámka 2.36. Místo spojení „soubor LN vektorů“ budeme častěji používat „LN soubor“. Podobně v případě lineární závislosti.

Poznámka 2.37. $V = \{\vec{0}\}$ bázi nemá, protože v něm neexistuje LN vektor.

Příklad 2.38. Rozhodněte o LN či LZ vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ z $\mathbb{R}^4$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zjišťujeme, zda rovnice $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 + \alpha_4\vec{x}_4 = \vec{0}$ má jen triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ (pak jsou vektory podle definice LN), nebo zda existuje netriviální řešení (potom jsou LZ). Řešíme soustavu:

$$\begin{aligned} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0 \\ 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

V maticovém zápisu máme homogenní soustavu s maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Upravíme ji ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice v horním stupňovitém tvaru má samé hlavní sloupce. Z kapitoly Soustavy lineárních algebraických rovnic poté víme, že v takovém případě existuje jen triviální řešení

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Dokázali jsme tak, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ jsou LN. Označme $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$. (Z teorie víme, že jde o vektorový prostor.) Potom je $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ soubor LN generátorů V, proto je bází V. Jelikož v bázi záleží na pořadí, je například soubor $(\vec{x}_4, \vec{x}_3, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ jinou bází V.

Příklad 2.39. Rozhodněte o LN či LZ vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ z $\mathbb{R}^4$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Tentokrát řešíme soustavu:

$$\begin{aligned} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 &= 0 \\ 1\alpha_1 + 0\alpha_2 - 1\alpha_3 + 2\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

V maticovém zápisu máme homogenní soustavu s maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Upravíme ji ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice v horním stupňovitém tvaru má poslední sloupec vedlejší. Z kapitoly Soustavy lineárních algebraických rovnic pak víme, že netriviální řešení získáme, když za neznámou odpovídající vedlejšímu sloupci zvolíme nenulové číslo, například $\alpha_4 = 1$, a ostatní neznámé dopočítáme. Dostáváme $\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_1 = -1$. To jest:

$$(-1)\vec{x}_1 + (-1)\vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4 = \vec{0}.$$

Tedy máme netriviální LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ rovnou $\vec{0}$, což znamená, že jsou LZ. Ze vztahu $(-1)\vec{x}_1 + (-1)\vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4 = \vec{0}$ dále vidíme, že $\vec{x}_4 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3$, tudíž podle třetí vlastnosti LO máme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$. Označme $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$. Vyškrtneme-li z výše uvedené matice soustavy poslední sloupec, vidíme, že po ekvivalentních řádkových úpravách zůstanou v matici v horním stupňovitém tvaru pouze hlavní sloupce. Zjišťujeme tudíž, že je $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ soubor LN generátorů V, proto je to báze V.

Dalším důležitým pojmem je dimenze, která (jak uvidíme zanedlouho) s bází úzce souvisí.

Definice 2.40. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $V \neq \{\vec{0}\}$. Nechť existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že jsou splněny dvě podmínky:

1. ve V existuje n LN vektorů,
2. každých $(n+1)$ vektorů z V je LZ.

Potom říkáme, že **dimenze** V je konečná a rovna n a píšeme $\dim V = n$. V opačném případě říkáme, že dimenze V je nekonečná a píšeme $\dim V = +\infty$. Pro nulový vektorový prostor klademe $\dim V = 0$.

Poznámka 2.41. Rozeberme, kdy je $\dim V = +\infty$, tj. kdy V nemá konečnou dimenzi. Opačný případ ve výše uvedené definici znamená negaci výroku, to jest: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je ve V buď každých n vektorů LZ, nebo existuje $(n+1)$ LN vektorů. Jelikož $V \neq \{\vec{0}\}$, je jasné, že ne každý vektor z V je LZ. Potom ale, má-li negace výroku platit, dostáváme, že musejí existovat dva LN vektory ve V. Poté protože ne každé dva vektory jsou LZ, dostáváme, že existují tři LN vektory atd. Neboli nekonečná dimenze znamená, že ve V pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje n LN vektorů.

Příklad 2.42. Uvažujme prostor $\mathbb{R}^4$. Nechť

$$V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Protože V je LO, jde o vektorový prostor. Je zřejmé, že soubor

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

je jeho bází, protože vektory v souboru jsou LN generátory V. Jelikož ve V existují tři LN vektory, víme zatím, že $\dim V \geq 3$. Abychom dokázali, že $\dim V = 3$, museli bychom ověřit, že každé čtyři vektory z V jsou LZ. Následující věta nám tuto práci ušetří. [18]

Věta 2.43 (Steinitzova věta o výměně)**.** *Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LN vektory z vektorového prostoru V nad tělesem T. Nechť dále $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m$ jsou vektory z V splňující pro každé $i \in \hat{n}$:*

$$\vec{x}_i \in [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda .$$

Pak platí:

[18] Ernst Steinitz (1871–1928), německý matematik. Slavná věta o výměně by se možná měla spíše jmenovat Grassmannova, protože Grassmann ji zmiňoval již ve svém díle Ausdehnungslehre roku 1844. Práce se ale nestala známou, proto ji Steinitz necituje a větu znovu vyslovuje a dokazuje roku 1913.

1. $m \geq n$,

2. existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \widehat{m}$ *takové, že*

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_n\})]_\lambda.$$

Důkaz. ★ Označme $L = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda$.

- Protože $\vec{x}_1 \in L$, plyne z věty 2.25 o vlastnostech LO, že

  $$L = [\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda.$$

  Dále podle pátého bodu věty 2.28 (alternativní definice LZ pro více vektorů) platí, že $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m$ jsou LZ vektory. Šestý bod věty 2.28 (alternativní definice LZ) potom říká, že některý z y-ových vektorů je LK předchozích (využili jsme faktu, že $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, protože je vybraný z LN vektorů), tj. existuje index $i_1 \in \widehat{m}$ takový, že $\vec{y}_{i_1} \in [\vec{x}_1, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i_1-1}]_\lambda$. Odtud podle věty 2.25 plyne, že $\vec{y}_{i_1}$ lze z $[\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda$ vyhodit, aniž by se LO změnil, tedy $[\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1\})]_\lambda$. Dostáváme tak kýženou rovnost:

  $$L = [\vec{x}_1, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1\})]_\lambda.$$

  Tudíž jsme nahradili jeden vektor z původních vektorů $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m$ vektorem $\vec{x}_1$. Je-li $n = 1$, je důkaz hotov.

- Je-li $n \geq 2$, pak nutně $m \geq 2$. Jinak bychom měli $L = [\vec{x}_1]_\lambda$ a $\vec{x}_2 \in L$, což by byl spor s LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2$. Pro $n \geq 2$ pokračujeme dál ve výměně. Opět fakt, že $\vec{x}_2 \in L$, implikuje jednak rovnost $L = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1\})]_\lambda$, jednak LZ vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1\})$. Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ jsou LN. Nutně proto platí, že $\vec{x}_2 \notin [\vec{x}_1]_\lambda$. Šestý bod věty 2.28 vynucuje tudíž existenci indexu $i_2 \in \widehat{m} - \{i_1\}$ tak, že $\vec{y}_{i_2}$ lze nakombinovat z předchozích vektorů v posloupnosti $\vec{x}_1, \vec{x}_2, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1\})$. Díky tomu z věty 2.25 plyne, že $L = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} - \{i_1, i_2\})]_\lambda$. Ve druhém kroku jsme tak nahradili vektorem $\vec{x}_2$ další z původních generátorů prostoru L.

- Tak pokračujeme dál, dokud nevyčerpáme všechny vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ nebo všechny vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m$. Ukažme, že případ, kdy bychom vyčerpali všechny y-ové vektory a zároveň nevyčerpali všechny x-ové, nemůže nastat. Kdyby totiž $m < n$, potom bychom po m-tém kroku dostali $L = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m]_\lambda$. Zároveň by ale zbýval vektor $\vec{x}_{m+1}$, který by podle předpokladu splňoval $\vec{x}_{m+1} \in L$. To by byl spor s LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}$. Proto nutně $m \geq n$ a můžeme provést právě n kroků. Po n-tém kroku máme:

  $$L = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, (\vec{y}_i \mid i \in \widehat{m} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_n\})]_\lambda. \qquad \square$$

Poznámka 2.44.

- Z prvního bodu Steinitzovy věty plyne, že počet LN vektorů ve vektorovém prostoru nepřekročí počet generátorů tohoto prostoru.
- Druhý bod věty říká, že v LO existují generátory, které lze nahradit danými LN vektory, proto věta o výměně. Věta ale neříká, které z generátorů máme vyhodit.

Příklad 2.45. Návrat k příkladu v $\mathbb{R}^4$, kde vyšetřujeme dimenzi $V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.
Již víme, že $\dim V \geq 3$. Jelikož V je generovaný třemi vektory, Steinitzova věta tvrdí, že ve V existují nejvýše tři LN vektory. Tudíž každé čtyři vektory ve V jsou LZ. To už podle definice dimenze znamená, že $\dim V = 3$.

Steinitzova věta umožňuje zavést alternativní definici dimenze, která dává do souvislosti pojem dimenze a báze.

Věta 2.46 (Alternativní definice dimenze)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Pak* $\dim V = n$ *tehdy a jen tehdy, když ve V existuje n-členná báze.*

Důkaz.

- ($\Rightarrow$): Nechť $\dim V = n$, pak ve V existuje podle definice dimenze n-členný LN soubor. Označme jej $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$. Ukážeme, že $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. Potom bude jasné, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze.

  Předpokládejme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ negenerují V, tj. ve V existuje vektor $\vec{x}_{n+1} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. Užitím šestého bodu věty 2.28 (alternativní definice LZ) odvodíme pak LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}$: Jelikož jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ LN, platí, že $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, a pro každé $i \in \hat{n}$ platí, že $\vec{x}_i$ není LK předchozích vektorů, a zároveň ani $\vec{x}_{n+1}$ není LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$. LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}$ ovšem znamená spor s předpokladem, že $\dim V = n$.

- ($\Leftarrow$): Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze V, pak ve V existuje n LN vektorů (jelikož $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LN). Protože $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou zároveň generátory V, plyne z prvního bodu Steinitzovy věty, že nejvýše n vektorů může být LN. Tudíž každých $(n+1)$ vektorů je LZ. Tím je podle definice dokázáno, že $\dim V = n$. □

Důsledek 2.47 (Důsledky Steinitzovy věty)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť V je vektorový prostor nad tělesem T splňující* $\dim V = n$*. Pak platí:*

1. *Každá báze V je n-členná.*
2. *Každý n-členný LN soubor ve V už je souborem generátorů V, a tedy je bází V.*

3. *Každý n-členný soubor generátorů V už je LN, a je tudíž bází V.*

Důkaz.

1. Víme, že ve V existuje n-členná báze. Označme ji $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$. Uvažujme ve V ještě jinou bázi $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$. Jelikož vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou generátory V a vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ jsou LN, je podle prvního bodu Steinitzovy věty $n \geq m$. Protože také $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ jsou generátory V a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN, platí opět podle prvního bodu Steinitzovy věty, že také $m \geq n$.

2. Viz důkaz první implikace ve větě 2.46.

3. Pokud $n = 1$, je pravdivost výroku zřejmá. Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existují vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, které generují V a zároveň jsou LZ. Z jejich LO lze pak vyhodit některý z vektorů, aniž by se LO změnil. Potom je ale V generován $n-1$ vektory, což podle Steinitzovy věty znamená, že ve V existuje nejvýše $n-1$ LN vektorů. Tudíž každých n vektorů je LZ, a to je spor s předpokladem, že $\dim V = n$. □

Poznámka 2.48. Přemýšlivý čtenář se možná ptá, proč jsme pro definici dimenze nepoužili hned na začátku definici pomocí báze: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Pokud $V = \{\vec{0}\}$, pak $\dim V = 0$. Pokud $V \neq \{\vec{0}\}$, pak buď ve V existuje n-členná báze a klademe $\dim V = n$, nebo báze neexistuje a klademe $\dim V = +\infty$.

Taková definice by ale potřebovala ověřit korektnost – skutečnost, že když ve V někdo najde bázi o deseti členech a prohlásí, že dimenze je deset, nestane se, že by někdo jiný našel bázi o jiném počtu členů. Fakt, že všechny báze mají stejný počet členů, se snadno ověří pomocí Steinitzovy věty. Ponecháme čtenáři k zamyšlení, jak by jej ověřil bez jejího použití. Původní definice dimenze je tudíž sice techničtější, ale nevyžaduje dodatečné ověření korektnosti.

Příklad 2.49. Uveďme, jak vypadají báze a dimenze nejznámějších vektorových prostorů.

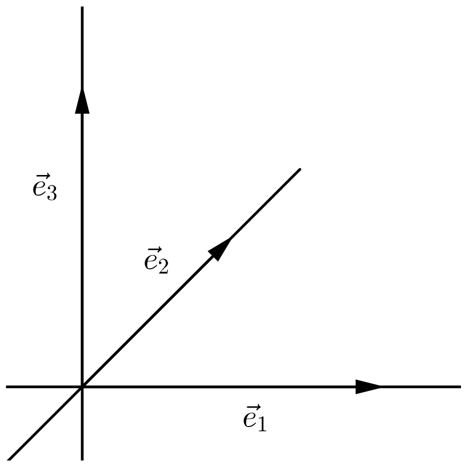
1. V T^n nazýváme **standardní bází** [19] soubor $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, kde

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Chceme-li zdůraznit počet členů báze, píšeme $\mathcal{E}_n$. Není těžké nahlédnout, že vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ jsou LN. Jde o generátory, protože každý vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$ lze

[19] Též se používá termín kanonická báze.

psát jako $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n$. Proto $\dim T^n = n$. Ilustrace standardní báze $\mathbb{R}^3$ je na obrázku 3.



Obrázek 3: Obvyklé – tzv. pravotočivé – znázornění standardní báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$.

2. V prostoru matic $T^{m,n}$ (o m řádcích a n sloupcích) nazýváme **standardní bází** soubor $\mathcal{E} = (\mathbb{E}_{1,1}, \mathbb{E}_{1,2}, \ldots, \mathbb{E}_{m,n})$, kde pro každé $i \in \widehat{m}$ a každé $j \in \hat{n}$ je $\mathbb{E}_{i,j}$ matice, která má m řádků a n sloupců, prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci je roven jedné a všechny ostatní prvky jsou nulové. Tedy například $\mathbb{E}_{2,1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$. Podobně jako v předchozím příkladě nahlédneme, že jde o LN generátory a je jich mn, proto $\dim T^{m,n} = mn$.

3. V prostoru $\mathcal{P}_n$ polynomů stupně maximálně $n-1$ s přidáním nulového polynomu nazýváme **standardní bází** soubor $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ jsou polynomy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ definovány:

$$e_1(t) := 1,\ e_2(t) := t,\ \ldots,\ e_n(t) := t^{n-1}.$$

Vysvětleme, že tyto vektory generují $\mathcal{P}_n$. Uvažujeme-li libovolný polynom $p \in \mathcal{P}_n$, pak existují komplexní čísla $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ taková, že pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_{n-1}t^{n-1} = \alpha_0 e_1(t) + \alpha_1 e_2(t) + \alpha_2 e_3(t) \cdots + \alpha_{n-1}e_n(t).$$

To jest:

$$p = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + \cdots + \alpha_{n-1}e_n,$$

neboli $p \in [e_1, e_2, \ldots, e_n]_\lambda$. LN vektorů ověříme z definice. Předpokládáme-li, že $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n = \mathcal{O}$ (nulový polynom), znamená to, že polynom vlevo má pro všechna $t \in \mathbb{C}$ tvar $\beta_1 + \beta_2 t + \cdots + \beta_n t^{n-1}$. Jelikož jde o nulový polynom, všechny koeficienty $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ jsou nutně nulové, a tím je dokázána LN. Protože má $\mathcal{P}_n$ n-člennou bázi, je $\dim \mathcal{P}_n = n$ (značení $\mathcal{P}_n$ je voleno právě tak, aby n odpovídalo dimenzi).

4. V prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů jsou pro každé n vektory $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (definované stejně jako v předchozím bodě) LN, proto $\dim \mathcal{P} = +\infty$.

Podívejme se, jak lze z báze komplexního vektorového prostoru získat bázi reálného vektorového prostoru.

Věta 2.50 (Báze nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$)**.** ★ *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, $\dim V = n \in \mathbb{N}$ a nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze V. Potom $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \mathrm{i}\vec{x}_1, \mathrm{i}\vec{x}_2, \ldots, \mathrm{i}\vec{x}_n)$ je báze $V_{\mathbb{R}}$, čímž značíme V nad $\mathbb{R}$, kde je operace sčítání zachována a operace násobení zúžena na $\mathbb{R} \times V$. Tedy* $\dim V_{\mathbb{R}} = 2n$.

Důkaz. Ověříme, že jde o LN soubor generátorů $V_{\mathbb{R}}$.

- LN: Uvažujme libovolnou LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \mathrm{i}\vec{x}_1, \mathrm{i}\vec{x}_2, \ldots, \mathrm{i}\vec{x}_n$ s reálnými koeficienty dávající nulový vektor, tj. $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k (\mathrm{i}\vec{x}_k) = \vec{0}$. Pak platí:
$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \mathrm{i}\beta_k)\vec{x}_k = \vec{0}.$$
Z LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ ve V nad $\mathbb{C}$ plyne, že $\alpha_k + \mathrm{i}\beta_k = 0$ pro každé $k \in \hat{n}$. Nulová tedy musí být reálná i imaginární část komplexních čísel $\alpha_k + \mathrm{i}\beta_k$, tj. $\alpha_k = \beta_k = 0$ pro každé $k \in \hat{n}$.

- Vektory generují $V_{\mathbb{R}}$: Nechť $\vec{x} \in V$. Jelikož vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ generují V nad $\mathbb{C}$, existují čísla $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{C}$ taková, že $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \vec{x}_k$. Rozepišme nyní komplexní čísla pomocí jejich reálné a imaginární části, tj. $\gamma_k = \alpha_k + \mathrm{i}\beta_k$. Poté platí:
$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \mathrm{i}\beta_k)\vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{i}\beta_k)\vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k (\mathrm{i}\vec{x}_k).$$
Podařilo se nám tudíž $\vec{x}$ zapsat jako LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \mathrm{i}\vec{x}_1, \mathrm{i}\vec{x}_2, \ldots, \mathrm{i}\vec{x}_n$ pomocí reálných koeficientů. □

Steinitzova věta má ještě další dva důležité důsledky. První souvisí s faktem, že báze daného prostoru je nejmenším souborem z hlediska počtu generátorů. Druhý s vlastností, že báze je největším LN souborem. Zformulujeme tyto důsledky precizně ve tvaru vět.

Věta 2.51 (Výběr báze z generátorů)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Nechť $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda = V$. Pak existují indexy $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \widehat{m}$ takové, že $(\vec{y}_{i_1}, \vec{y}_{i_2}, \ldots, \vec{y}_{i_n})$ tvoří bázi V.*
Slovy: „Z generátorů nenulového prostoru lze vždy vybrat bázi.“

Důkaz. Případ $m < n$ podle Steinitzovy věty nenastává. Je-li $m = n$, potom podle třetího bodu důsledku 2.47 Steinitzovy věty je $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$ bází V. Je-li $m > n$, pak jsou vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ LZ a podle pátého bodu věty 2.28 (alternativní definice LZ pro více vektorů) lze z $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$ vyhodit jeden z generátorů, aniž by se obal změnil.

Je-li $m - 1 = n$, potom je soubor získaný z původního vyhozením jednoho vektoru hledanou bází. Je-li $m - 1 > n$, pokračujeme analogicky. □

Příklad 2.52. Uvažujme $\mathbb{R}^4$. Nechť $P = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Vyberte z generátorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ bázi P.

Řešení: Postupujeme jako při vyšetřování LN a LZ, tedy vytvoříme matici, jejímiž sloupci jsou generátory P. Na pořadí vektorů v LO nezáleží, dáme je tudíž do matice tak, aby se nám co nejsnáze převáděla do horního stupňovitého tvaru.

$$(\vec{x}_2\ \vec{x}_3\ \vec{x}_1\ \vec{x}_4) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 9 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že třetí a čtvrtý sloupec jsou vedlejší, proto jim odpovídající vektory jsou LK předchozích. Konkrétně $\vec{x}_1 = 2\vec{x}_2 - \vec{x}_3$ a $\vec{x}_4 = -\vec{x}_2 + \vec{x}_3$. Proto lze vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_4$ z LO vyhodit, aniž by se změnil, tj. $P = [\vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$. Z matice také vidíme, že vektorům $\vec{x}_2$ a $\vec{x}_3$ odpovídají hlavní sloupce, jsou proto LN a soubor $(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ tvoří hledanou bázi. Báze není jediná možná. Z horního stupňovitého tvaru vyčteme snadno, že například $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ nebo $(\vec{x}_2, \vec{x}_4)$ jsou také báze P.

Věta 2.53 (Doplnění LN vektorů na bázi)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Nechť $k \in \hat{n}$ a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ jsou LN vektory ve V. Pak existují vektory $\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n$ takové, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n)$ je bází V.*
Slovy: „LN vektory lze vždy doplnit na bázi v prostoru konečné dimenze."

Důkaz. Podle věty 2.46 (alternativní definice dimenze) v prostoru V existuje n-členná báze $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$. Užitím Steinitzovy věty (jen pozor na to, že m ze Steinitzovy věty je nyní n a n ze Steinitzovy věty je nyní k) víme, že existují indexy $i_1, i_2, \dots, i_k \in \hat{n}$ takové, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{n} - \{i_1, \dots, i_k\})]_\lambda.$$

Jelikož soubor $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{n} - \{i_1, \dots, i_k\}))$ je n-členný soubor generátorů V, jde o bázi podle třetího bodu důsledku 2.47 Steinitzovy věty. □

Příklad 2.54. Doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi $\mathbb{R}^4$, je-li

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Uvažujme standardní bázi $\mathbb{R}^4$ a v ní dva vektory nahraďme vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$. (To jistě půjde, neboť $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ nejsou jeden násobkem druhého, a tedy jsou LN.) Jistě platí:

$$\mathbb{R}^4 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Vyhodíme z LO nadbytečné vektory a zůstane nám hledaná báze. Už dopředu víme, že bude čtyřčlenná, protože $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Převedli jsme tudíž úlohu na problém vybrat bázi z generátorů, viz příklad 2.52. Vytvoříme tedy matici, jejímiž sloupci jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$. Z matice v horním stupňovitém tvaru poté vyčteme, které vektory jsou LK předchozích a lze je z LO vyhodit.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z matice v horním stupňovitém tvaru vidíme, že $\vec{e}_2$ a $\vec{e}_3$ odpovídají vedlejším sloupcům, jsou proto LK předchozích a lze je z LO vyhodit, aniž by se změnil. Konkrétně $\vec{e}_2 = -\vec{x}_1 + 2\vec{e}_1$ a $\vec{e}_3 = -2\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 4\vec{e}_1$. Proto $\mathbb{R}^4 = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4]_\lambda$. Podle třetího bodu důsledku 2.47 Steinitzovy věty je čtyřčlenný soubor generátorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$ LN, a tudíž jde o hledanou bázi. Rozmyslete si, že je důležité napsat v matici dopředu ty vektory, které má hledaná báze obsahovat.

2.6 Souřadnice

Zaveďme úmluvu, že vektorový prostor V dimenze n budeme značit V_n.

Věta 2.55 (Vektor jako LK báze). *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T. Potom pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje právě jedna uspořádaná n-tice $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$.*

Důkaz.

- Existence takového vektoru $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ plyne z faktu, že $V_n = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

- Jednoznačnost dokážeme sporem. Nechť $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ jsou dvě různé n-tice splňující, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i$. Pak ale $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)\vec{x}_i = \vec{0}$ a přitom jde o netriviální LK, protože jistě pro některý index $i_0 \in \hat{n}$ je $\alpha_{i_0} - \beta_{i_0} \neq 0$. To je spor s LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. $\square$

Definice 2.56. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T.

1. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Potom α_i nazveme i-tou **souřadnicí** vektoru $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$.

2. Nechť $i \in \hat{n}$. Zobrazení $x_i^\#: V_n \to T$, které vektoru přiřadí jeho i-tou souřadnici v bázi $\mathcal{X}$, tj. $x_i^\#(\vec{x}) \coloneqq \alpha_i$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, nazveme i-tým **souřadnicovým funkcionálem** v bázi $\mathcal{X}$.

3. Zobrazení $(.)_\mathcal{X}\colon V_n \to T^n$, které vektoru přiřadí vektor všech jeho souřadnic v bázi $\mathcal{X}$, tj. $(\vec{x})_\mathcal{X} \coloneqq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, nazveme **souřadnicovým izomorfismem** v bázi $\mathcal{X}$. [20]

Zápis $(\vec{x})_\mathcal{X}$ čteme „$\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$“ nebo „souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$“.

Poznámka 2.57. Díky větě 2.55 o vektoru jako LK báze víme, že souřadnicový funkcionál a souřadnicový izomorfismus jsou skutečně zobrazení, tj. že se nestane, že by $x_i^\#$ přiřadil stejnému vektoru $\vec{x}$ více různých čísel nebo $(.)_\mathcal{X}$ přiřadil stejnému vektoru $\vec{x}$ více různých n-tic čísel.

Věta 2.58 (Vlastnosti souřadnicového funkcionálu)**.** *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T. Pak platí pro každé $i \in \hat{n}$:*

1. *Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ je $x_i^\#(\vec{x} + \vec{y}) = x_i^\#(\vec{x}) + x_i^\#(\vec{y})$ (souřadnicový funkcionál $x_i^\#$ je* ***aditivní****).*

2. *Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in V_n$ je $x_i^\#(\alpha\vec{x}) = \alpha x_i^\#(\vec{x})$ (souřadnicový funkcionál $x_i^\#$ je* ***homogenní****).*

[20] Místo $(\vec{x})_\mathcal{X}$ se v literatuře vyskytuje i $\{\vec{x}\}_\mathcal{X}$ nebo $\langle\vec{x}\rangle_\mathcal{X}$.

3. *Pro bazické vektory nabývá souřadnicový funkcionál jen hodnot nula nebo jedna:*

$$x_i^{\#}(\vec{x}_i) = 1 \text{ a } x_i^{\#}(\vec{x}_j) = 0 \text{ pro každé } j \in \hat{n}, j \neq i.$$

Důkaz.

1. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i$. Potom $\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\vec{x}_i$. Podle definice $x_i^{\#}$ poté platí, že $x_i^{\#}(\vec{x}) = \alpha_i$, $x_i^{\#}(\vec{y}) = \beta_i$ a $x_i^{\#}(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha_i + \beta_i$, a tedy dostáváme:

$$x_i^{\#}(\vec{x} + \vec{y}) = x_i^{\#}(\vec{x}) + x_i^{\#}(\vec{y}).$$

2. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$. Potom $\alpha\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)\vec{x}_i$. Podle definice je $x_i^{\#}(\vec{x}) = \alpha_i$ a $x_i^{\#}(\alpha\vec{x}) = \alpha\alpha_i$, a tudíž platí:

$$x_i^{\#}(\alpha\vec{x}) = \alpha x_i^{\#}(\vec{x}).$$

3. Tvrzení plyne z rovnosti $\vec{x}_j = 0\vec{x}_1 + \cdots + 0\vec{x}_{j-1} + 1\vec{x}_j + 0\vec{x}_{j+1} + \cdots + 0\vec{x}_n$. □

Poznámka 2.59. Definujme **Kroneckerovo delta** δ_{ij}:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &:= 0 \text{ pro každé } i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j, \\ \delta_{ii} &:= 1 \text{ pro každé } i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Potom lze třetí bod věty 2.58 zapsat jako $x_i^{\#}(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$. [21]

Důsledek 2.60 (Vlastnosti souřadnicového izomorfismu)**.** *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T. Pak platí:*

1. *Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ je $(\vec{x} + \vec{y})_{\mathcal{X}} = (\vec{x})_{\mathcal{X}} + (\vec{y})_{\mathcal{X}}$ (souřadnicový izomorfismus je* ***aditivní****).*

2. *Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in V_n$ je $(\alpha\vec{x})_{\mathcal{X}} = \alpha(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ (souřadnicový izomorfismus je* ***homogenní****).*

3. *$(\vec{x}_j)_{\mathcal{X}} = \vec{e}_j$ pro každé $j \in \hat{n}$, kde $\vec{e}_j$ je j-tý vektor standardní báze T^n.*

Řádně si rozmysleme rozdíl mezi objekty označenými $\vec{x}_i$ a $x_i^{\#}$. Zatímco $\vec{x}_i$ je vektor z V_n, je $x_i^{\#}$ zobrazení, které každému vektoru z V_n přiřazuje číslo z T.

Příklad 2.61. Uvažujte prostor $\mathbb{R}^3$ a v něm báze

$$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

[21] Leopold Kronecker (1823–1891), německý matematik

(a) Najděte $(\vec{x})_{\mathcal{E}}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) Dále určete $e_2^{\#}(\vec{x})$ a $x_3^{\#}(\vec{x})$, kde $\vec{x}_3$ je třetí bazický vektor $\mathcal{X}$.

Řešení:

(a) Jelikož $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dostáváme, že $(\vec{x})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}$.

Označme $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, potom $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Máme tedy soustavu LAR s rozšířenou maticí soustavy:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Z matice vyčteme, že $\alpha_3 = -8, \alpha_2 = 8, \alpha_1 = 3$, tudíž $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$.

(b) Ze souřadnic $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{E}$ vidíme, že $e_2^{\#}(\vec{x}) = 5$, a z jeho souřadnic v bázi $\mathcal{X}$, že $x_3^{\#}(\vec{x}) = -8$.

Úkol 2.62. Rozmyslete si, že pro libovolný vektor $\vec{x} \in T^n$ platí, že $(\vec{x})_{\mathcal{E}} = \vec{x}$. Viz obrázek 4.

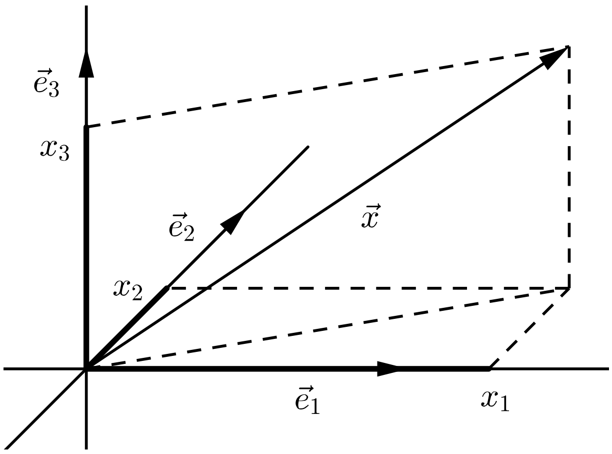
Vraťme se k motivačnímu příkladu ze začátku kapitoly. Zadání znělo: *Popište množinu všech latinských čtverců, tj. matic o třech řádcích a třech sloupcích takových, že součty ve všech řádcích i ve všech sloupcích se rovnají.*

Řešení: Označíme-li s společný řádkový a sloupcový součet, a a b první dva prvky v prvním řádku a c a d první dva prvky v druhém řádku, pak každý latinský čtverec má podobu:

$$\begin{pmatrix} a & b & s-a-b \\ c & d & s-c-d \\ s-a-c & s-b-d & a+b+c+d-s \end{pmatrix}.$$

Snadno nahlédneme, že latinské čtverce tvoří vektorový prostor dimenze pět. Báze obsahuje následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 4: Souřadnice vektoru $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ve standardní bázi jsou rovny jeho složkám.

Bez jakéhokoliv počítání je například jasné (Je to čtenáři jasné?), že následující úloha nemá jediné řešení (přesněji řečeno, že má nekonečně mnoho řešení, nebo nemá žádné). *Doplňte čtverce na latinské*:

$$(a)\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 4 & & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad (b)\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & 4 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad (c)\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & 2 \\ \hline 4 & & 3 \\ \hline \end{array}\ .$$

Úkol 2.63. * Uvažujme ještě jednu úlohu podobnou latinským čtvercům. V novinách se objevila v následujícím znění: *Vypočtěte a doplňte chybějící čísla tak, aby vznikl **magický čtverec**, tj. aby součet čísel ve všech řádcích, sloupcích i v obou úhlopříčkách byl vždy stejný.*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 14 & & \\ \hline & & 10 & 17 \\ \hline 10 & 9 & & \\ \hline & & 13 & \\ \hline \end{array}\ .$$

Úkoly pro vás ale znějí následovně:

1. Najděte a popište množinu všech řešení úlohy co nejjednodušším možným způsobem. (Způsobů doplnění je nekonečně mnoho. Přitom v novinách bylo uvedeno právě jedno řešení.)

2. Ověřte, že magické čtverce o čtyřech řádcích a čtyřech sloupcích tvoří vektorový prostor. Najděte jeho dimenzi a bázi.

3. Přeformulujte úlohu tak, aby jediné řešení měla. Zároveň ale změňte zadání co nejméně. Ukažte, že navržená změna zaručuje jednoznačnost řešení.