7 Konvexní množiny ★

Motivace. Lineární programování (LP) řeší problém nalezení minima (resp. maxima) lineárního funkcionálu na jisté konvexní množině. Z bohaté škály úloh z této oblasti jmenujme alespoň dopravní problém, problém maximalizace zisku a problém minimalizace výrobních nákladů.

Zformulujme **kanonickou úlohu LP**:
Nechť je dána matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, kde $h(\mathbb{A}) = m < n$. Dále nechť $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Najděte

$$\min \vec{c}^T \vec{x}$$

při splnění tzv. podmínek přípustnosti, tj. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vyhovuje podmínkám:

$$\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b} \text{ a } x_i \geq 0 \text{ pro každé } i \in \hat{n}.$$

Existuje-li optimální řešení – tedy řešení, kdy se nabývá minima – pak leží ve vrcholech konvexního mnohostěnu (tj. konvexně nezávislých generátorech konvexního obalu) určeného podmínkami přípustnosti. Metody řešení úloh LP si osvojíte ve druhém ročníku v předmětu Lineární programování. (Za všechny jmenujme alespoň známou simplexovou metodu. Její název je odvozen geometrického objektu, kterému říkáme simplex a který si na konci kapitoly pro zajímavost také definujeme. Ovšem přímo se simplexy metoda pracuje jen ve speciálních případech.)

V celé této kapitole bude V značit vektorový prostor nad tělesem $T \subset \mathbb{R}$. K definici konvexní množiny totiž potřebujeme pojem úsečka a ten má dobrý smysl právě pro taková tělesa.

Definice 7.1. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in V$. **Úsečkou** mezi body $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme množinu:

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha, \beta \in T,\ \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \geq 0\}.$$

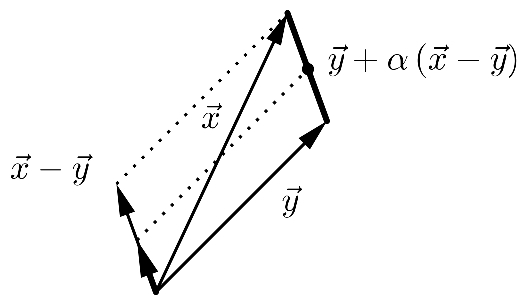
Poznámka 7.2. Uveďme ekvivalentní zápisy úsečky:

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha, \beta \in T,\ \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \geq 0\} = \{\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \mid \alpha \in \langle 0, 1\rangle \cap T\}$$

$$= \{\vec{y} + \alpha(\vec{x} - \vec{y}) \mid \alpha \in \langle 0, 1\rangle \cap T\}.$$

Z posledního zápisu je vidět, že úsečku mezi body $\vec{x}, \vec{y}$ získáme přičítáním α-násobků vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ k vektoru $\vec{y}$ pro $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. [39] Tudíž v $\mathbb{R}^2$ odpovídá úsečka tomu, co si pod tímto pojmem každý představí. Viz obrázek 14.

[39] Zmiňme, že v současné literatuře je častější symbol $[0, 1]$ pro uzavřený interval.



Obrázek 14: Úsečka mezi body $\vec{x}$ a $\vec{y}$ v $\mathbb{R}^2$.

Je možné uvažovat pouze prostory nad $T \subset \mathbb{R}$, protože po číslech z T chceme, aby šla porovnat s nulou ($\alpha \geq 0$), což pro komplexní nereálná čísla nelze.

Definice 7.3. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $K \subset V$. Množinu K nazveme **konvexní**, pokud platí:

- $K \neq \emptyset$,
- K obsahuje s každými dvěma body i úsečku mezi nimi.

Poznámka 7.4. Každá lineární varieta je konvexní množinou, protože s každými dvěma body obsahuje úsečku mezi nimi. Úsečka je totiž podmnožinou spojnice.

Příklad 7.5. Konvexními množinami v $\mathbb{R}^2$ jsou kromě variet (bodů, přímek, celého $\mathbb{R}^2$) také kruhy, čtverce, obdélníky atd. Konvexními množinami v $\mathbb{R}^3$ jsou opět kromě variet (bodů, přímek, rovin a celého $\mathbb{R}^3$) také koule, krychle, kvádry atd.

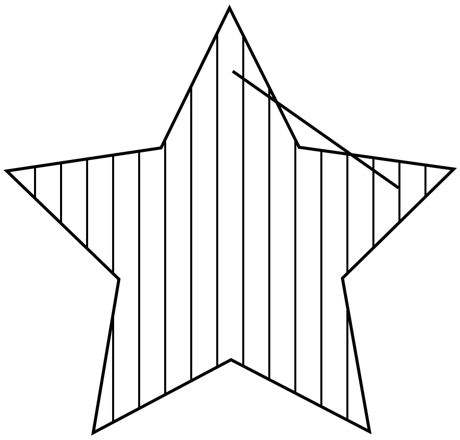
S pojmem úsečka úzce souvisí pojem konvexní obal.

Definice 7.6. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V. Potom **konvexní kombinací** vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ nazveme lineární kombinaci $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k$, která splňuje $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1$ a $\alpha_k \geq 0$ pro každé $k \in \hat{\ell}$. Množinu všech konvexních kombinací nazýváme **konvexním obalem** vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ a značíme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa$. Platí tedy:

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa \coloneqq \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1,\ \alpha_k \in T \text{ a } \alpha_k \geq 0 \text{ pro každé } k \in \hat{\ell} \right\}.$$

Poznámka 7.7. Přímo z definice plyne, že konvexní obal dvou vektorů je roven úsečce mezi nimi.

Souvislost konvexních obalů a konvexních množin je shrnuta v následujících třech větách.



Obrázek 15: Hvězda není konvexní množinou v $\mathbb{R}^2$. Je vyznačena úsečka mezi body hvězdy, která není ve hvězdě obsažena.

Věta 7.8 (Konvexní obal je konvexní množina)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V. Pak $K = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ je konvexní množina a K obsahuje $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Analogie důkazu věty 6.7. □

Věta 7.9 (Konvexní množina obsahuje konvexní kombinace)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a K je konvexní množina ve V. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z K. Pak platí:*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa \subset K.$$

Slovy: „Konvexní množina obsahuje s libovolnými svými body i všechny jejich konvexní kombinace.“

Důkaz. Analogie důkazu věty 6.8. □

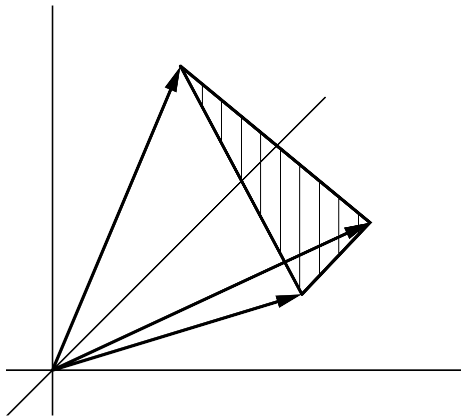
Věta 7.10 (Minimalita konvexního obalu)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V. Potom $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ je nejmenší konvexní množina (ve smyslu inkluze) obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Z věty 7.9 víme, že každá konvexní množina obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ obsahuje také $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa$. Jelikož zároveň z věty 7.8 plyne, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ je konvexní množina, máme dokázáno, že je to nejmenší konvexní množina obsahující dané body. □

Poznámka 7.11. Podle věty 7.10 je řešením úlohy najít minimální konvexní množinu K, která obsahuje vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, konvexní obal $K = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$.

Příklad 7.12. Rozmyslete si, jak vypadají konvexní obaly jednoho, dvou, tří, čtyř, pěti vektorů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Například $K = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$, kde $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jsou AN vektory, tvoří trojúhelník s vrcholy $\vec{x}, \vec{y}$ a $\vec{z}$.

Řešení: Jelikož jde o konvexní množinu, musí K obsahovat úsečky mezi $\vec{x}$ a $\vec{y}$, $\vec{x}$ a $\vec{z}$, $\vec{y}$ a $\vec{z}$. Dále musí K také obsahovat úsečky mezi body ze tří výše uvedených úseček. Tudíž K obsahuje trojúhelník s vrcholy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, viz obrázek 16. Jelikož trojúhelník už je konvexní množina, našli jsme nejmenší konvexní množinu obsahující $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, tedy jsme našli $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$.



Obrázek 16: Konvexní obal tří AN vektorů v $\mathbb{R}^3$ je trojúhelník s vrcholy v daných bodech.

Poslední otázka, která by nás mohla v souvislosti se vztahem mezi konvexními množinami a konvexními obaly napadnout, zní: „Je každá konvexní množina konvexním obalem nějakých vektorů?“ Odpověď – na rozdíl od lineárních variet – zní: NE (nezávisle na dimenzi V). Například v $\mathbb{R}^2$, jak si snadno rozmyslíte, jsou konvexní obaly mnohoúhelníky. Proto kruh jako konvexní obal konečně mnoha vektorů nezískáme.

Definice 7.13. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ jsou AN vektory z V, $k \in \mathbb{N}_0$. Pak $[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\kappa$ nazýváme **k-simplexem s vrcholy** $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$. Speciálně nazýváme:

(a) $[\vec{x}_0]_\kappa$ **bodem**,

(b) $[\vec{x}_0, \vec{x}_1]_\kappa$ **úsečkou**,

(c) $[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2]_\kappa$ **trojúhelníkem**,

(d) $[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\kappa$ **čtyřstěnem**.

Poznámka 7.14. Uvědomme si, že k-simplexy v $\mathbb{R}^3$ odpovídají naší geometrické představě bodu, úsečky, trojúhelníku a čtyřstěnu.

Definice 7.15. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ jsou vektory z V, $\ell \geq 2$. Řekneme, že jsou **konvexně závislé** (KZ), pokud existuje index $i_0 \in \hat{\ell}$ tak, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_\ell]_\kappa$. V opačném případě je nazveme **konvexně nezávislými** (KN). Jediný vektor je vždy KN.

Příklad 7.16. Zatímco v $\mathbb{R}^2$ jsou nanejvýš tři vektory AN, pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ lze najít n KN vektorů. Například vrcholy libovolného pravidelného mnohoúhelníku jsou KN.