

Matice a lineární zobrazení

Z teorie je třeba vědět:

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a nechť $\vec{b} \in A(P)$, pak $A^{-1}(\vec{b})$ (množina řešení $A\vec{x} = \vec{b}$) splňuje $A^{-1}(\vec{b}) = \vec{a} + \ker A$, kde \vec{a} je partikulární řešení, tedy $A\vec{a} = \vec{b}$.
2. Matice zobrazení A v bázích \mathcal{X}, \mathcal{Y} splňuje $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$.
3. Jak se získá matice složeného zobrazení pomocí matic skládaných zobrazení.

1. Nechť

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

jsou dvě báze vektorového prostoru \mathbb{C}^3 . Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ zadané svou maticí v bázi \mathcal{X}

$${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Nalezněte množinu } B^{-1}(\vec{b}),$$

(a) je-li $(\vec{b})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$,

(b) je-li $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$,

(c) je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2. Nechť

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

jsou dvě báze vektorového prostoru \mathbb{C}^3 . Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$,

$${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Nalezněte množinu } B^{-1}(\vec{b}), \text{ je-li } (\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze vektorového prostoru \mathbb{R}^3 . Je zadán lineární

operátor A na \mathbb{R}^3 pomocí své matice v bázi \mathcal{X} ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte

(a) $\ker A$, $d(A)$ a $h(A)$ (je A regulární operátor?),

(b) všechna řešení rovnice

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

(c) $A^{-1}(P)$, tedy vektor podprostoru P , je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

4. Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (-2\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3, -\vec{x}_1 + \vec{x}_3)$ jsou dvě báze vektorového prostoru V_3 . Necht $A \in \mathcal{L}(V_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte všechna

řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte jádro a hodnotu zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ zadaného pomocí matice ve standardních bázích

$${}_{\mathcal{E}_3}A{}^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta & 1 \\ -\beta & \beta^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Necht $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze vektorového prostoru \mathbb{R}^4 a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze vektorového prostoru \mathbb{R}^2 .

Necht $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}B{}^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -5 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dále je zadáno lineární zobrazení $A \in$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ následující maticí ${}_{\mathcal{E}_3}A{}^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nalezněte všechna řešení rovnice $BA\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Necht $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze vektorového prostoru \mathbb{R}^3 . Je zadán lineární

operátor A na \mathbb{R}^3 pomocí své matice v bázi \mathcal{X} ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Nalezněte

(a) $\ker A$, $d(A)$ a $h(A)$ (je A regulární operátor?),

(b) všechna řešení rovnice

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ najděte:

(a) $\ker A$,

(b) $A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$,

kde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je definované pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jako

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y + \alpha z \\ -\alpha x + \beta z \end{pmatrix}.$$

9. Necht $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ je definované pomocí matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

je báze \mathbb{R}^2 . V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$

- najděte jádro A ,
- určete, zda A je prosté,
- najděte obor hodnot $A(\mathbb{R}^2)$,
- určete hodnotu A .

10. Necht $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definujeme

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ a dále známe } {}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha^2 & -\alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Rozhodněte, v jakém pořadí lze zobrazení skládat.
- Pro složené zobrazení najděte v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ jeho hodnotu a jádro.

Výsledky: Matice a lineární zobrazení

1. (a) např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$

(b) $B^{-1}(\vec{b}) = \emptyset$

(c) např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$

2. např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$.

3. (a) $\ker A = \{\vec{0}\}$, $d(A) = 0$, $h(A) = 3$, A je regulární operátor

(b) $A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

(c) např. $A^{-1}(P) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$

4. $A^{-1}(\vec{b}) = \{\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3\}$

5. (i) $\beta \neq 0 \wedge \beta \neq 1 \implies h(A) = 2, \ker A = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (ii) $\beta = 0 \implies h(A) = 1, \ker A = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (iii) $\beta = 1 \implies h(A) = 2, \ker A = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
6. např. $(BA)^{-1} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$
7. (a) $h(A) = 2, d(A) = 1, \ker A = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda, A$ není regulární
- (b) $A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
8. (i) $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \implies \ker A = \left[\begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \\ -\frac{\alpha + \beta}{\beta} \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda, A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\beta} \\ \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} + \ker A$
- (ii) $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0 \implies \ker A = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda, A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} + \ker A$
- (iii) $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0 \implies \ker A = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda, A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix} + \ker A$
- (iv) $\alpha = \beta = 0 \implies \ker A = \mathbb{R}^3, A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \emptyset$
9. (i) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \implies \ker A = \{\vec{0}\}, A$ je prosté, $A(\mathbb{R}^2) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \right]_\lambda, h(A) = 2$
- (ii) $\alpha = 0 \vee \alpha = 1 \implies \ker A = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda, A$ není prosté, $h(A) = 1, A(\mathbb{R}^2) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ pro
- $\alpha = 1, A(\mathbb{R}^2) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ pro $\alpha = 0$
10. (a) existuje zobrazení AB i BA
- (b) (i) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$ je $h(AB) = 2, \ker AB = \{\vec{0}\}, h(BA) = 2, \ker BA = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (ii) pro $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$ je $h(AB) = 1, \ker AB = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda, h(BA) = 1, \ker BA = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$