

## Podprostor

Z teorie je nutné znát pojmy: podprostor, součet podprostorů  $P + Q$ , průnik podprostorů  $P \cap Q$ . A je důležité vědět, že  $P + Q$  a  $P \cap Q$  jsou vektorové prostory, a tudíž má smysl hledat jejich bázi a dimenzi. Také využijeme 1. větu o dimenzi.

1. **[cvičení]** Zjistěte, zda množina  $M \subset \mathbb{C}^3$  je podprostor  $\mathbb{C}^3$ , a pokud je, určete bázi a dimenzi  $M$ . (Využijte faktu, že dimenze vlastního podprostoru je menší než dimenze prostoru samého.)

$$(a) M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_j \in Z \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} \right\},$$

$$(b) M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\},$$

$$(c) M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 - x_3 = 0 \right\},$$

$$(d) M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \right\}.$$

2. **[cvičení]** Nechť  $P \subset \mathbb{R}^3$ ,  $Q \subset \mathbb{R}^3$ . Nalezněte dimenzi a bázi  $P + Q$  a  $P \cap Q$ , je-li

$$P = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\lambda} \text{ a } Q = \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

3. **[cvičení]** Nechť  $P \subset \mathbb{R}^4$ ,  $Q \subset \mathbb{R}^4$ . Nalezněte dimenzi a bázi  $P + Q$  a  $P \cap Q$ , je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \wedge 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \wedge 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \right\}.$$

4. **[cvičení]** Nechť  $P \subset \mathbb{C}^3$ ,  $Q \subset \mathbb{C}^3$ . Nalezněte dimenzi a bázi  $P + Q$  a  $P \cap Q$ , je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \right\} \text{ a}$$

$$(a) Q = \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

$$(b) Q = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

5. Nechť  $P \subset \mathbb{R}^3$ ,  $Q \subset \mathbb{R}^3$ ,  $V \subset \mathbb{R}^3$ . Nalezněte dimenzi a bázi  $P \cap Q \cap V$ , je-li  $P =$

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}, Q = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_{\lambda} \text{ a } V = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

## Zapamatujte si

Nechť  $V$  je vektorový prostor nad tělesem  $T$  a nechť  $M \subset V$ .

1.  $M \subset\subset V$  právě tehdy, když  $M$  je vektorovým prostorem nad  $T$  (operace definovány stejně jako ve  $V$ ).
2. Jsou-li  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  vektory z  $V$ , pak  $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$  je nejmenší podprostor  $V$ , který vektory  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  obsahuje.
3. Pokud  $P \subset\subset V$  a  $Q \subset\subset V$ , potom nejmenší podprostor  $V$  obsahující  $P$  i  $Q$  (tedy i jejich sjednocení) je  $P + Q$ . POZOR!  $P \cup Q$  obecně podprostor  $V$  netvoří.

**Příklad:** Nechť  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $P = [(\frac{1}{0})]_\lambda$  a  $Q = [(\frac{1}{1})]_\lambda$ , pak  $(\frac{1}{0}) + (\frac{0}{1}) = (\frac{1}{1}) \notin P \cup Q$ , a tedy  $P \cup Q$  není podprostorem  $V$ .

## Pro zajímavost

1. Ukažte, že matice s prvky z  $T$  rozměru  $m \times n$ , které mají na předepsaných místech nuly, tvoří podprostor  $T^{m,n}$ .
2. Rozmyslete si, že vektorový prostor  $T$  nad  $T$  má jen dva podprostory:  $\{0\}$  a sám sebe  $T$ .
3. Nechť  $V$  je podmnožina  $\mathbb{R}^{2,2}$  tvořená

(a) tzv. symetrickými maticemi, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}, a_{12} = a_{21} \right\},$$

(b) tzv. diagonálními maticemi, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zjistěte, zda  $V \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$ .

## Výsledky: Podprostor

1. (a)  $M$  není uzavřená vůči násobení číslem z  $C$ ,  
(b)  $M$  je podprostor dimenze 2,  
(c)  $M$  je podprostor dimenze 1,  
(d)  $M$  není uzavřená vůči operacím.

2.  $\dim P + Q = 3, \dim P \cap Q = 1$ , báze  $P + Q$  je např.  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ , báze

$$P \cap Q \text{ je např. } \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

3.  $\dim P + Q = 3, \dim P \cap Q = 1$ , báze  $P + Q$  je např.  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ , báze

$$P \cap Q \text{ je např. } \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

4. (a)  $\dim P + Q = 3, \dim P \cap Q = 1$ , báze  $P + Q$  je např.  $\mathcal{E}_3$ , báze  $P \cap Q$  je např.  $\left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .
- (b)  $\dim P + Q = \dim P \cap Q = \dim P = \dim Q = 2$ , tj.  $P + Q = P \cap Q = P = Q$ , báze je u všech těchto prostorů např.  $\left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .
5. Platí  $P \cap Q \cap V = P$ , proto  $\dim P \cap Q \cap V = 2$  a báze je např.  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ .

### Pro zajímavost

1. Snadno uvážíme, že při sčítání a násobení číslem se nuly zachovávají.
- 2.
3. Obě vlastnosti se při sčítání a násobení číslem zachovávají.