

## Vektorový prostor

Z teorie je třeba znát: definici tělesa a vektorového prostoru nad  $T$  (pro  $T = \mathbb{C}$  hovoříme o komplexním vektorovém prostoru, pro  $T = \mathbb{R}$  o reálném vektorovém prostoru), vlastnosti vektorového prostoru plynoucí bezprostředně z definice. Dále je třeba znát pojmy: vektor, matice, polynom.

1. **[přednáška]** Nechť  $V$  je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, tj.  $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ,

těleso  $T = \mathbb{R}$ . Pro každé  $\alpha \in \mathbb{R}$  a  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$  definujeme:

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že  $V$  s takto definovanými operacemi je vektorovým prostorem nad  $\mathbb{R}$ . Značíme jej  $\mathbb{R}^2$ .

2. Zobecnění příkladu 1.: pokud  $n$  je přirozené číslo,  $T$  je těleso,  $V$  je množina uspořádaných  $n$ -tic čísel z tělesa (budeme je zapisovat do sloupců), tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{n} \right\},$$

a operace jsou definovány po složkách,

tj. pro každé  $\alpha \in T$  a pro každé  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V$  a každé  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in V$  definujeme:

$$\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \alpha \odot \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix},$$

pak  $V$  je vektorovým prostorem nad  $T$ . Značíme jej  $T^n$ . Nejčastěji budeme pracovat s  $\mathbb{C}^n$  nebo  $\mathbb{R}^n$ .

3. Nechť  $T$  je těleso. Uvědomte si, že pak  $T^1 = T$  tvoří vektorový prostor nad  $T$ . Speciálně  $\mathbb{C}$  je komplexním vektorovým prostorem,  $\mathbb{R}$  je reálným vektorovým prostorem,  $\mathbb{Q}$  je vektorovým prostorem nad  $\mathbb{Q}$ .
4. Nechť  $n$  je přirozené číslo,  $T$  je těleso. Rozmyslete si, že pokud  $T' \subset T$  a  $T'$  je těleso, pak  $T^n$  tvoří vektorový prostor nad  $T'$ . Speciálně  $\mathbb{C}^n$  je vektorovým prostorem nad  $\mathbb{R}$  i nad  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}^n$  je vektorovým prostorem nad  $\mathbb{Q}$ . Pozor! Naopak to neplatí:  $\mathbb{R}^n$  není vektorovým prostorem nad  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}^n$  není vektorovým prostorem nad  $\mathbb{C}$  ani nad  $\mathbb{R}$ .
5. **[cvičení]** Nechť  $V$  je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, těleso  $T = \mathbb{R}$ . Pro každé  $\alpha \in \mathbb{R}$  a každé  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$  definujeme:

(a)

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b)

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

Je  $V$  s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad  $\mathbb{R}$ ?

6. **[cvičení]** Nechť  $V$  je množina kladných reálných čísel, tj.  $V = \{x > 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$ , těleso  $T = \mathbb{R}$ . Pro každé  $\alpha \in \mathbb{R}$  a každé  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  (tj.  $\vec{x} = x > 0, \vec{y} = y > 0$ ) definujeme  $\vec{x} \oplus \vec{y} = xy$  a  $\alpha \odot \vec{x} = x^\alpha$ . Je  $V$  s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad  $\mathbb{R}$ ?

7. **[cvičení]** Nechť  $V$  je podmnožina  $\mathbb{C}^3$  složená z vektorů  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , pro které platí:

- (a)  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,
- (b)  $x_1 = 0$ ,
- (c)  $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$ ,
- (d)  $x_1 + x_2 = 0$ ,
- (e)  $x_1 + x_2 = 1$ ,
- (f)  $x_1 = x_2 \wedge x_1 \neq x_3$ ,
- (g) všechny složky jsou reálné,
- (h)  $x_1 = x_2$ ,
- (i)  $x_1 \neq x_2$ ,
- (j)  $x_1 + 2x_3 = 0$ ,
- (k)  $x_1 + 2x_3 = 1$ .

Která z těchto množin je při zachování operací v  $\mathbb{C}^3$  (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách) vektorovým prostorem nad  $\mathbb{C}$ ?

8. Nechť  $T$  je těleso. Analogicky jako v příkladu 2. se ověří, že množina matic rozměru  $m \times n$  s prvky z  $T$  s operacemi definovanými po prvcích tvoří vektorový prostor nad  $T$ .

9. Nechť  $V$  je podmnožina  $\mathbb{R}^{2,2}$  tvořená

(a) tzv. symetrickými maticemi, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}, a_{12} = a_{21} \right\},$$

(b) tzv. diagonálními maticemi, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zjistěte, zda  $V$  je vektorovým prostorem nad  $\mathbb{R}$ .

10. Nechť  $\mathcal{P}$  je množina polynomů s operacemi definovanými bodově, tj. pro každé  $\alpha \in \mathbb{C}$  a každý polynom  $x \in \mathcal{P}$  a  $y \in \mathcal{P}$  definujeme:

$$(x \oplus y)(t) = x(t) + y(t) \quad \text{a} \quad (\alpha \odot x)(t) = \alpha x(t) \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

Ověřte, že  $\mathcal{P}$  tvoří vektorový prostor nad  $\mathbb{C}$ .

11. Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Ověřte, že také množina  $\mathcal{P}_n$  tvořená polynomy stupně nejvýše  $n - 1$  a nulovým polynodem (jeho stupeň není definován) nad tělesem  $\mathbb{C}$  tvoří vektorový prostor (operace definovány jako v předchozím příkladu).

## Zapamatujte si

Nejdůležitější příklady vektorových prostorů:  $T^n$  nad tělesem  $T$ ,  $T^{m,n}$  nad tělesem  $T$ , vektorový prostor polynomů  $\mathcal{P}$  nad tělesem  $\mathbb{C}$ , vektorový prostor polynomů  $\mathcal{P}_n$  stupně nejvýše  $n-1$  s přidáním nulového polynomu nad tělesem  $\mathbb{C}$ .

## Pro zajímavost

1. Uvažujme množinu  $V$  reálných posloupností s operacemi definovanými po složkách, tj. necht  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jsou reálné posloupnosti a  $\alpha \in \mathbb{R}$ , pak definujeme:

$$a \oplus b = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{a} \quad \alpha \odot a = (\alpha a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Pak  $V$  je vektorovým prostorem nad  $\mathbb{R}$ .

- (a) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nulami na prvních deseti místech tvoří vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ .
  - (b) Podmnožina tvořená posloupnostmi s prvním místem nenulovým, tj. posloupnostmi  $a$  s  $a_1 \neq 0$ , netvoří vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ .
  - (c) Podmnožina tvořená posloupnostmi s konečným počtem nenul tvoří vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ .
  - (d) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nekonečným počtem nul netvoří vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ .
  - (e) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nulovou limitou tvoří vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ .
  - (f) Podmnožina tvořená konvergentními posloupnostmi s nenulovou limitou netvoří vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ .
2. Uvažujme množinu  $V$  reálných funkcí definovaných na intervalu  $(a, b)$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$ , s operacemi definovanými bodově, tj. necht  $f, g \in V$  a necht  $\alpha \in \mathbb{R}$ , pak definujeme:

$$(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t) \quad \text{a} \quad (\alpha \odot f)(t) = \alpha f(t) \quad \text{pro každé } t \in (a, b).$$

Pak  $V$  je vektorovým prostorem nad  $\mathbb{R}$ .

- (a) Podmnožina tvořená omezenými funkcemi tvoří vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ .
- (b) Podmnožina tvořená funkcemi s tzv. konečným nosičem, tj.

$\{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{existuje konečná } X \subset (a, b) \text{ taková, že } f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in (a, b) \setminus X\}$ ,  
tvoří vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ .

- (c) Podmnožina tvořená polynomy s reálnými koeficienty tvoří vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ .

## Výsledky: Vektorový prostor

1. Je třeba prověřit: (a) uzavřenost vůči operacím (b) axiomy
2. Viz přednáška.
3. Stačí si uvědomit, že jediný rozdíl mezi prvky tělesa  $T$  a vektorového prostoru  $T$  je ten, že v prvním případě jsou to reálná čísla a v druhém reálná čísla v závorkách.
4. Stačí zkontrolovat uzavřenost. Axiomy platit musí.
5. Není vektorový prostor.

- (a) Neplatí např. axiom o násobení jedničkou.
  - (b) V prostoru neexistuje nulový vektor.
6.  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ .
  7. Stačí prověřovat uzavřenost. Vektorové prostory nad  $\mathbb{C}$  jsou (b), (d), (h), (j).
  8. Viz přednáška.
  9. (a), (b) Jsou to vektorové prostory. Stačí prověřit uzavřenost, protože axiomy byly prověřeny v  $\mathbb{R}^{2,2}$ .
  10. Viz přednáška.
  11. Viz přednáška.