Zkoušková písemka LAZ 21.1.2014 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou vektory z $\mathbb{C}^4$.

   (a) Nalezněte bázi $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right]_\lambda$, která obsahuje

   i. vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, ii. vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Najděte dva různé doplňky $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right]_\lambda$ do $\mathbb{C}^4$.

2. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou báze $\mathbb{C}^3$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, (\vec{y}_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$(\vec{y}_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{x})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určete $(\vec{x} - 2\vec{y})_\mathcal{E}$ a $(\vec{x} - 2\vec{y})_\mathcal{X}$.

3. Zjistěte, v kterém případě je $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Pokud není, vysvětlete proč. Pokud je, najděte $h(A), d(A), \ker A$. Pro každé $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí:

   (a) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (jde tedy o součin matice a vektoru),

   (b) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \mathrm{i}y \\ -x \end{pmatrix}$,

   (c) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \right\},$$

$$Q = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

5. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (-2\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3, -\vec{x}_1 + \vec{x}_3)$ jsou dvě báze vektorového prostoru V_3. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, ${}^\mathcal{X}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Najděte hodnost a defekt A.

(b) Najděte bázi $\ker A$. (V závislosti na vektorech z báze $\mathcal{X}$.)

(c) Nalezněte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (V závislosti na vektorech z báze $\mathcal{X}$.)

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte jádro a defekt zobrazení.
   (b) Definujte obor hodnot a hodnost zobrazení.
   (c) Vyslovte větu o tom, čemu je roven součet hodnosti a defektu lineárního zobrazení.
   (d) Najděte zobrazení s defektem rovným pěti.
   (e) Najděte zobrazení s hodností rovnou pěti.

2. (a) Definujte lineární operátor. (Vysvětlete oba pojmy, tj. operátor i lineární.)
   (b) Vyslovte větu o zadání lineárního zobrazení (pomocí obrazů bazických vektorů).
   (c) Vysvětlete, kolik existuje lineárních zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ splňujících:
      i. $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$
      ii. $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$
      iii. $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

      (Jistě se vám bude hodit předchozí věta i definice linearity zobrazení.)

3. (a) Vyslovte větu o výběru báze z generátorů.
   (b) Vyslovte větu o doplnění LN vektorů na bázi.
   (c) Dokažte, že n LN vektorů ve vektorovém prostoru dimenze rovné $n \in \mathbb{N}$ tvoří bázi.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové či mínusové body získané během semestru a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.

2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.