Zkoušková písemka LAZ 16.1.2014 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Najděte všechny hodnoty $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která jsou následující vektory z $\mathbb{C}^4$ lineárně závislé. Pro všechny parametry $\alpha \in \mathbb{C}$, kdy jsou vektory LZ, dokažte podle definice, že jsou LZ.
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^4$, nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^4$.
$$(\vec{x}_1)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{x}_2)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x}_3)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Lze vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ doplnit na bázi $\mathbb{C}^4$? Vysvětlete.
   (b) Pokud ano, doplňte je na bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbb{C}^4$.
   (c) Najděte $(\vec{x})_\mathcal{X}$ (existuje-li).
   (d) Zjistěte, zda $\vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?

3. Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^4)^\#$. Nechť pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ platí, že $\varphi(\vec{x}) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$.
   (a) Určete $h(\varphi)$ a $d(\varphi)$. Zdůvodněte.
   (b) Najděte bázi ker φ
$$i. \quad \text{obsahující vektor} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad ii. \quad \text{obsahující vektory} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. Je-li $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$, najděte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$.
$$(a) \quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -x_2 \right\}, \qquad (b) \quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 = -x_2^2 \right\}.$$

5. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Nechť ${}^\mathcal{Y}A$ $(={}^\mathcal{Y}A^\mathcal{Y})$ má tvar
$${}^\mathcal{Y}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najděte

(a) $h(A)$ a $d(A)$,

(b) $\ker A$,

(c) všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(d) všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte lineární zobrazení.
   (b) Vyslovte větu o linearitě složeného zobrazení.
   (c) Vyslovte a dokažte větu o prostotě a jádru lineárního zobrazení.

2. (a) Vyslovte 2. větu o dimenzi.
   (b) Definujte izomorfní zobrazení (všechny 3 vlastnosti vysvětlete).
   (c) Najděte lineární zobrazení A s následujícími vlastnostmi:
      i. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a A epimorfní,
      ii. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ a A monomorfní,
      iii. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{R}^2)$.

3. (a) Definujte lineární obal.
   (b) Jakou vlastnost musí mít vektor $\vec{x}$, aby ve vektorovém prostoru V nad T platilo:

$$[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}]_\lambda.$$

   (c) Z následujících tvrzení vyberte pravdivá:
      i. Každý podprostor konečné dimenze lze psát jako lineární obal nějakých vektorů.
      ii. Každý lineární obal je podprostorem.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové či mínusové body získané během semestru a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.

2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.