Zkoušková písemka LAZ 14.1.2014 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava LAR pro $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & z & = & \alpha. \end{array}$$

   (a) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ má soustava právě jedno řešení?

   (b) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ má soustava více řešení? Pro každé takové α alespoň dvě řešení najděte.

2. Nechť jsou v $\mathbb{C}^3$ dány soubory $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1)$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je standardní báze $\mathbb{C}^3$.

   (a) Je $\mathcal{X}$ báze $\mathbb{C}^3$?

   (b) Najděte souřadnice $\vec{x}$ v $\mathcal{X}$ (existují-li), je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

   (c) Najděte $(\vec{u})_{\mathcal{X}}$, je-li $(\vec{u})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Nechť $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jsou LN vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že

   (a) vektory $3\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z},\ \alpha\vec{x} - \vec{z},\ 8\vec{x} + 2\alpha\vec{y} + \vec{z}$ jsou LZ,

   (b) vektor $\vec{x} + 2\vec{y} + \alpha\vec{z}$ leží v lineárním obalu vektorů z bodu (a).

4. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$.
   Najděte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$.

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ a $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Najděte ${}^{\mathcal{E}_4}A^{\mathcal{E}_3}$.

   (b) Najděte bázi $A(\mathbb{R}^4)$.

   (c) Najděte bázi $\ker A$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte LN vektory. (Slovně i matematickým zápisem.)
   (b) Definujte bázi.
   (c) Vyslovte definici dimenze.
   (d) Vyslovte větu o alternativní definici dimenze, tj. o vztahu mezi bází a dimenzí.
2. (a) Definujte součet množin.
   (b) Definujte direktní součet množin.
   (c) Kdy je součet podprostorů direktní? Tvrzení dokažte.
3. (a) Definujte matici zobrazení v bázích.
   (b) Jaký je vztah mezi hodností zobrazení a hodností jeho matice v bázích?
   (c) Vyslovte větu o výpočtu obrazu vektoru, tj. větu o vztahu ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ a $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}}$.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové či mínusové body získané během semestru a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.