Zkoušková písemka LAZ 13.2.2014 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^4$. $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete dimenzi P a rozhodněte, zda $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in P$.

2. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$.

   (a) Který z vektorů $\vec{x}$ splňuje $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$:

   $$(a1) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (a2) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (a3) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Určete $h(A)$, $d(A)$.

   (b) Doplňte $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ na bázi $A(\mathbb{R}^2)$.

   (c) Najděte bázi $\ker A$.

   (d) Je A regulární operátor? Vysvětlete.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi P, Q, $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$ a Q je nejmenší podprostor obsahující vektory $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{Y} = ((2))$ je báze $\mathbb{R}$ a nechť ${}^\mathcal{Y}A^\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dále nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\#$ definovaný pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jako

   $$\varphi(\vec{x}) = 2x_2 + x_3.$$

   Vyřešte ty z úloh a podúloh, které mají smysl.

(a) Určete $h(A\varphi)$, $d(A\varphi)$, $\ker(A\varphi)$, $(A\varphi)^{-1}(\vec{b})$, kde $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, a $(A\varphi)^{-1}(\vec{c})$, kde $\vec{c} = 2$.

(b) Určete $h(\varphi A)$, $d(\varphi A)$, $\ker(\varphi A)$, $(\varphi A)^{-1}(\vec{b})$, kde $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, a $(\varphi A)^{-1}(\vec{c})$, kde $\vec{c} = 2$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte podprostor.
   (b) Definujte jádro lineárního zobrazení.
   (c) Dokažte, že jádro lineárního zobrazení je podprostor. (Vyjděte přímo z definice podprostoru.)
2. (a) Definujte generátory a bázi vektorového prostoru.
   (b) Definujte dimenzi (nulovou, konečnou, nekonečnou).
   (c) Jsou následující tvrzení pravdivá? Pokud ano, dokažte je. Pokud ne, zkonstruujte protipříklad.
      i. Je-li $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ LN soubor ve vektorovém prostoru V, pak je $\mathcal{X}$ bází V.
      ii. Je-li $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ souborem generátorů vektorového prostoru V, pak je $\mathcal{X}$ bází V.
3. (a) Definujte monomorfismus (vysvětlete obě vlastnosti, které se v pojmu monomorfismus skrývají).
   (b) Definujte epimorfismus (vysvětlete obě vlastnosti, které se v pojmu epimorfismus skrývají).
   (c) Uveďte příklad zobrazení, které není monomorfní.
   (d) Uveďte příklad zobrazení, které není epimorfní.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové či mínusové body získané během semestru a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.