Zkoušková písemka LAZ 11.2.2014 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ \alpha x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 2\alpha y & + & 4z & = & 2 \end{array}.$$

   (a) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava řešení.

   (b) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava jediné řešení, a toto řešení spočítejte.

   (c) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava více řešení. V takovém případě najděte dvě různá řešení.

2. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ je soubor v $\mathbb{R}^4$, kde $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Doplňte soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ na bázi

   (a) $P = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, (b) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$.

3. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$, nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3,\ \vec{z} = (\vec{y})_\mathcal{Y}.$$

   (a) Zjistěte, zda $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?

   (b) Zjistěte, zda $\vec{y} \in [11\vec{x}_2, 3\vec{x}_1, \vec{x}_3]_\lambda$?

   (c) Zjistěte, zda $\vec{z} \in [-\vec{x}_1, -2\vec{x}_2]_\lambda$?

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \right]_\lambda, Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

5. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, ${}^\mathcal{Y}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Určete $h(B), d(B)$.

   (b) Najděte $\ker B$.

   (c) Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$, je-li $(\vec{b})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte matici lineárního zobrazení v bázích.
   (b) Vyslovte větu, ve které je $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}}$ vyjádřeno pomocí matice zobrazení A v nějakých bázích, tedy větu o výpočtu obrazu vektoru.
   (c) Jak získáte matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ znáte-li matici ${}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{X}}$? Přidejte do tvrzení správné předpoklady (co je A, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$).

2. (a) Definujte vzor množiny.
   (b) Co platí pro vzor podprostoru? Dokažte.
   (c) Definujte jádro lineárního zobrazení a vysvětlete, odkud plyne, že je podprostorem?

3. (a) Definujte doplněk podprostoru. (Použijte v definici symbol $\oplus$ a vysvětlete, co znamená.)
   (b) Odkud plyne, že dimenze doplňku je určena jednoznačně?
   (c) Popište, jak vypadá doplněk $P \subset\subset \mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ v závislosti na dimenzi P.
   (d) Za jaké podmínky existuje jediný doplněk $P \subset\subset \mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$?

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.