Zkoušková písemka LAZ 7.1.2014 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava LAR pro $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 1. \end{array}$$

   (a) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ má soustava jedno řešení? Pro taková α řešení najděte.

   (b) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ má soustava více řešení? Pro taková α alespoň dvě řešení najděte.

   (c) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ nemá soustava řešení?

2. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z $\mathbb{R}^3$, kde $(\vec{x}_1)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\vec{x}_2)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x}_3)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Je $\mathcal{X}$ báze $\mathbb{R}^3$?

   (b) Najděte $(\vec{z})_\mathcal{Y}$, je-li $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (c) Najděte $(\vec{u})_\mathcal{X}$, je-li $(\vec{u})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (d) Najděte $\vec{v}$, je-li $(\vec{v})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Je $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$? Pokud ano, najděte hodnost, defekt a jádro φ.
   Pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ definujeme:

   (a) $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - (x_1 - 1)^2 + 1$,

   (b) $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - (x_1 - 1)^2$,

   (c) $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - (x_1 - 1)^2 + 1 - 2x_1$.

4. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{C}^4$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.
   Najděte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$.

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, kde $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   (a) Určete $h(A)$ a $d(A)$.

   (b) Najděte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$.

(c) Najděte $\ker A$.

(d) Najděte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte vektorový prostor. Z axiomů stačí, když uvedete pouze axiom o nulovém vektoru a axiom o opačném vektoru.
   (b) Definujte operace tak, aby $V = \mathbb{R}^2$ nad tělesem $T = \mathbb{R}$ tvořilo vektorový prostor.
   (c) Definujte operace tak, aby $V = \mathbb{R}^2$ nad tělesem $T = \mathbb{R}$ netvořilo vektorový prostor.
2. (a) Definujte podprostor.
   (b) Definujte sjednocení a průnik podprostorů.
   (c) Jsou to opět podprostory? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, vyvraťte protipříkladem.
3. (a) Definujte složené zobrazení.
   (b) Vyslovte větu o hodnosti složeného zobrazení.
   (c) Vyslovte větu o matici složeného zobrazení.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové či mínusové body získané během semestru a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.