Zkoušková písemka LAZ 4.2.2014 Jméno:

Praxe (za každý příklad maximálně 4 body)

1. Nechť je dána soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} -9x & + & 9y & + & \alpha^2 z & = & 1 \\ -3x & + & 3y & + & \alpha z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}.$$

   (a) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava řešení.

   (b) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která má soustava více než jedno řešení.

   (c) Ve všech případech, kdy má soustava více řešení, alespoň jedno řešení spočtěte.

2. Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^4$, nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^4$.

$$(\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, (\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x}_3)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Lze vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ doplnit na bázi $\mathbb{C}^4$? Vysvětlete.

   (b) Pokud ano, doplňte je na bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbb{C}^4$.

   (c) Najděte $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$.

   (d) Zjistěte, zda $\vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$?

3. Zjistěte, zda množina $M \subset \mathbb{C}^3$ je podprostor $\mathbb{C}^3$. Pokud není, vysvětlete proč. Pokud je, najděte bázi a dimenzi M.

   (a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 - x_3 = 0 \right\}$,

   (b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \vee x_1 - x_3 = 0 \right\}$.

   Čtěte pozorně! Zadání (a) a (b) nejsou stejná.

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda, Q = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

5. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ a ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{E}_3$ je standardní báze $\mathbb{R}^3$.

   (a) Najděte $h(B)$ a $d(B)$.

(b) Vysvětlete, zda B je monomorfní nebo epimorfní zobrazení.

(c) Najděte ${}^{\mathcal{E}_3}B$ (což znamená ${}^{\mathcal{E}_3}B^{\mathcal{E}_3}$).

(d) Najděte bázi $B(P)$, kde $P = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

Teorie (za každý okruh maximálně 3 body)
Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte složené zobrazení.
   (b) Najděte $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tak, že:
   $$(i) \quad h(AB) = h(A), \qquad (ii) \quad h(AB) < h(A), \qquad (iii) \quad h(AB) > h(A).$$
   Pokud neexistují, vysvětlete proč.
   (c) Vyslovte větu o linearitě složeného zobrazení a dokažte ji.
2. (a) Definujte izomorfismus (nápověda: jde o zobrazení se třemi vlastnostmi) a každou z vlastností vysvětlete.
   (b) Definujte izomorfismus vektorových prostorů.
   (c) Vyberte, které z následujících prostorů jsou izomorfní. Vysvětlete.
   $$\mathbb{R}^4,\ \mathbb{C}^4,\ \mathbb{R}^{2,2},\ \mathbb{R}^3.$$
3. (a) Definujte lineárně závislé vektory.
   (b) Vyslovte alternativní definici LZ pro více vektorů.
   (c) Dokažte, že je-li $\vec{x} \in V$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T, pak $2\vec{x}$, $3\vec{x}$ jsou lineárně závislé. Dokažte to použitím definice LZ a poté i alternativní definice LZ.
   (d) Mezi následujícími tvrzeními rozhodněte, která jsou pravdivá. U nepravdivých uveďte protipříklad.
      i. Jsou-li vektory LZ a vynecháme-li některý z nich, pak zůstanou LZ.
      ii. Jsou-li vektory LZ, pak mezi nimi existuje vektor, který je lineární kombinací předchozích vektorů.

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.