7. cvičení LAP

Lineární zobrazení

1. Nechť $A : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ je definované $(Ax)(t) = x(t+1)\ \forall t \in \mathbb{C}$.
   (a) Je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$?
   (b) Pokud ano, najděte ${}^{\mathcal{X}}A$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$

$$\forall t \in \mathbb{C} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= t - t^2 \\ x_2(t) &= 1 - t + t^2 \\ x_3(t) &= -1 + t. \end{aligned}$$

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathbb{C}^2)$.

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ Ax_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ Ax_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$

$$\forall t \in \mathbb{C} \quad \begin{aligned} x_1(t) &= 1 - t \\ x_2(t) &= t^2 \\ x_3(t) &= 1 + t. \end{aligned}$$

   Řešte rovnici $Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Nechť $\varphi \in (V_n)^{\#}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Jaký je vztah ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{E}}$ a $(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}}$?

4. $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$.

$$(Ax)(t) = t \cdot (Dx)(2t + \alpha)\ \forall t \in \mathbb{C}.$$

   Nechť dále $b \in \mathcal{P}_3$.

$$b(t) = \beta + 2t\ \forall t \in \mathbb{C}.$$

   Najděte množinu všech řešení $Ax = b$ v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

5. Nechť $p \equiv x - 2y = 3\alpha$ a $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Najděte všechny hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka p protla úsečku spojující $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

6. $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$. $W_1 \equiv \begin{array}{rcl} 2x - y + 3z - u &=& 1 \\ x + 2y - z + u &=& 2. \end{array}$ $W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}]_\alpha$. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte vzájemnou polohu a průnik W_1 a W_2.

7. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$.

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcl} x &=& 1 + 2t \\ y &=& -3 + 2t \\ z &=& 5 + 3t, \end{array} \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x - 5y - 5z &=& 15 \\ 3x + 5y - 5z &=& 35. \end{array}$$

   Nechť $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Najděte parametrické rovnice příčky, která prochází bodem $\vec{a}$.

8. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$.

$$W_1 = [\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} 4x + y - z &=& 2 \\ 2x + 2y + z &=& 7, \end{array} \qquad W_3 = [\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

   Najděte příčku W_1 a W_2 rovnoběžnou s W_3.

9. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
$$^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
$W \subset \mathbb{R}^3$
$$W \equiv 4x - z = 3.$$
Najděte neparametrické rovnice $A(W)$.

10. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
$$^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
$W \subset \mathbb{R}^3$.
$$W = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}]_\alpha.$$
Najděte parametrické a neparametrické rovnice $A^{-1}(W)$.

11. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$. P je množina všech vektorů, které mají 1. složku o 3 větší než součet 2. a 3. souřadnice v bázi $\mathcal{X}$. Ukažte, že P je lineární varieta a najděte její neparametrické rovnice.

12. Nechť $P, Q \subset \mathbb{R}^3$. $P = [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\alpha$.
$$Q \equiv \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0. \end{array}$$
Sestavte matici projektoru A na P podle Q, tj. $^{\mathcal{E}}A_P = ?$

13. Nechť D je operátor derivování a S je operátor integrování. Nechť $\varphi \in \mathcal{P}_3^\#$ definovaný
$$\varphi(x) = \alpha_0 + \beta_2 + x(i),$$
kde $(x)_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ a $(x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ je standardní báze $\mathcal{P}_3$ a $\mathcal{X} = (e_3, e_1, e_2)$ je báze $\mathcal{P}_3$. Najděte všechna řešení
   (a) $(\varphi D)(x) = 1$,
   (b) $(\varphi S)(x) = 1$.

   Zapište získané lineární variety pomocí neparametrických rovnic v příslušných standardních bázích.