6. cvičení LAP

Lineární funkcionál – pokračování

1. Nechť $\varphi \in (\mathcal{P}_2)^{\#}$. $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2)$ jsou báze $\mathcal{P}_2$, kde

$$\forall t \in \mathbb{C}$$
$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + t \\ x_2(t) &= 1 - t \\ y_1(t) &= 1 - 2t \\ y_2(t) &= 3 + 2t. \end{aligned}$$

   Nechť $(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Najděte $(\varphi)_{\mathcal{Y}^{\#}}$.

2. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$.

$$(\varphi_1)_{\mathcal{E}^{\#}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, (\varphi_2)_{\mathcal{X}^{\#}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \varphi_3(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 - 2x_3,$$

   kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$. Jsou funkcionály $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ LN?

3. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in (\mathcal{P})^{\#}$. Pro každé $x \in \mathcal{P}$ platí

$$\varphi_1(x) = x(1) - x(0),\ \varphi_2(x) = x(2),\ \varphi_3(x) = 2x(1) - 3x(2),\ \varphi_4(x) = 2x(0) + x(1) + 4x(2).$$

   Jsou funkcionály $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ LN?

4. Nechť $\varphi \in (\mathcal{P}_3)^{\#}$. Pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ platí $\varphi(x) = x(i) - x(0)$. Řešte $\varphi(x) = i - 1$.

5. Nechť $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^3)^{\#}$.

$$\varphi_1(\vec{x}) = x_1 - x_2, (\varphi_2)_{\mathcal{X}^{\#}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

   kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Najděte bázi průniku jader funkcionálů, tj. $\varphi_1^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_2^{-1}(\{0\})$.

Lineární zobrazení

1. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$. Najděte dva doplňky P do $\mathbb{R}^3$ a zkonstruujte izomorfní zobrazení mezi nimi.

2. Nechť $A : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ je definované $(Ax)(t) = x(t+1)\ \forall t \in \mathbb{C}$.
   (a) Je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$?
   (b) Pokud ano, najděte ${}^{\mathcal{X}}A$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$

$$\forall t \in \mathbb{C}$$
$$\begin{aligned} x_1(t) &= t - t^2 \\ x_2(t) &= 1 - t + t^2 \\ x_3(t) &= -1 + t. \end{aligned}$$

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathbb{C}^2)$.

$$Ax_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),\ Ax_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),\ Ax_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),$$

kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$

$$\forall t \in \mathbb{C} \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= 1 - t \\ x_2(t) &= t^2 \\ x_3(t) &= 1 + t. \end{aligned}$$

Řešte rovnici $Ax = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

4. Nechť $\varphi \in (V_n)^{\#}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Jaký je vztah ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{E}}$ a $(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}}$?

5. $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$.
$$(Ax)(t) = t \cdot (Dx)(2t + \alpha) \ \forall t \in \mathbb{C}.$$
Nechť dále $b \in \mathcal{P}_3$.
$$b(t) = \beta + 2t \ \forall t \in \mathbb{C}.$$
Najděte množinu všech řešení $Ax = b$ v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

6. Nechť $p \equiv x - 2y = 3\alpha$ a $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Najděte všechny hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka p protla úsečku spojující $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

7. $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$. $W_1 \equiv \begin{array}{rcl} 2x - y + 3z - u &=& 1 \\ x + 2y - z + u &=& 2. \end{array}$ $W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}]_\alpha$. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte vzájemnou polohu a průnik W_1 a W_2.

8. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$.
$$W_1 \equiv \begin{array}{rcl} x &=& 1 + 2t \\ y &=& -3 + 2t \\ z &=& 5 + 3t, \end{array} \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x - 5y - 5z &=& 15 \\ 3x + 5y - 5z &=& 35. \end{array}$$
Nechť $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Najděte parametrické rovnice příčky, která prochází bodem $\vec{a}$.

9. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$.
$$W_1 = [\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} 4x + y - z &=& 2 \\ 2x + 2y + z &=& 7, \end{array} \qquad W_3 = [\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}]_\alpha.$$
Najděte příčku W_1 a W_2 rovnoběžnou s W_3.