4. cvičení LAP

Podprostor

1. Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$. Zjistěte, zda $M \subset\subset \mathcal{P}_4$, a v kladném případě určete $\dim M$ a najděte bázi M, je-li:

   a) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(1) = 0\}$,

   b) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(0) = 1\}$,

   c) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, \text{stupeň } x \text{ je nejvýše } 2\}$,

   d) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, (\forall t \in \langle 0, 1\rangle)(x(t) = x(1-t))\}$,

   e) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(1))\}$,

   f) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 |\, x(1) - 2x(-1) = 0 \wedge x(0) + x(1) = 0\}$.

2. Nechť $P = \big\{x \in \mathcal{P}_4 \;\big|\; (\forall t \in \mathbb{R})(x(t) = x(-t))\big\}$ a $Q = \big\{x \in \mathcal{P}_4 \;\big|\; (\forall t \in (1,2))(x(t) = x(1-t))\big\}$. Je-li $P \subset\subset \mathcal{P}_4$ a $Q \subset\subset \mathcal{P}_4$, najděte bázi a dimenzi $P + Q$ a $P \cap Q$.

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$. Určete dimenzi a nalezněte bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li:

   (a) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

   (b) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

   (c) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

   (d) $P = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]_\lambda$,

   (e) $P = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \;\middle|\; x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \wedge 2x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \wedge x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\right\}$, $Q = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \;\middle|\; 3x_1 = 2x_2 \wedge x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$.

4. Nechť $M = \left\{\mathbb{A} \in T^{n,n} \;\middle|\; \left(\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in T^n\right)\left(\exists \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in T^n\right)(\forall i \in \widehat{n})(\forall j \in \widehat{n})(\mathbb{A}_{ij} = x_i + y_j)\right\}$. Dokažte, že $M \subset\subset T^{n,n}$ a určete $\dim M$.

Lineární variety

Jsou-li lineární variety zadány v prostorech $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, dělejte náčrty situací!

1. Nechť $W \subset \mathbb{R}^2$, kde
$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}]_\lambda.$$
   Napište směrovou rovnici W, parametrické rovnice W a zapište W ve tvaru afinního obalu.

2. Nechť $W \subset \mathbb{R}^2$, kde
$$W = [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}]_\alpha.$$
   Napište parametrické rovnice W.

3. Nechť $W \subset \mathbb{R}^2$, kde
$$W \equiv y = 2.$$
Napište parametrické rovnice W.

4. Nechť $W \subset \mathbb{R}^3$, kde
$$W \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 1, \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -2. \end{array}$$
Najděte parametrické rovnice W.

5. Nechť $W \subset \mathbb{R}^3$, kde
$$W = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}]_\alpha.$$
Napište parametrické rovnice W.

6. Nechť $W \subset \mathbb{R}^4$, kde
$$W \equiv \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4. \end{array}$$
Najděte parametrické rovnice W.

7. Zjistěte, zda následující body z $\mathbb{R}^4$ leží v jedné přímce nebo v jedné rovině.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Návod: Uvědomte si, že nejmenší lineární varieta, která body obsahuje, je jejich afinní obal.

8. Rozmyslete si, jaké všechny případy mohou nastat pro průnik dvou lineárních variet v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

Ve všech příkladech zní zadání stejně: Určete vzájemnou polohu a najděte průnik lineárních variet W_1 a W_2.

(a) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde
$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t, \\ y & = & -1 & + & 2t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad W_2 \equiv -2x + y = 3.$$

(b) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde
$$W_1 \equiv x + y = 1, \qquad W_2 \equiv x - y = 3.$$

(c) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde
$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & 3t, \\ y & = & & & 2t, \\ z & = & & & t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

(d) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde
$$W_1 \equiv \begin{array}{rcr} x + y + z & = & 1, \\ x - y & = & 2, \end{array} \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & + & z & = & 3, \\ & & 2y & + & z & = & 1. \end{array}$$

(e) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

(f) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & z & = & -2, \\ 2x & - & y & & & = & 2. \end{array}$$

(g) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

(h) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

(i) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccl} x & = & 1 + 3t + s, \\ y & = & 1 + t - s, \\ z & = & 1 + t + s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(j) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & + & 3t & + & s, \\ y & = & & & t & - & s, \\ z & = & & & t & + & s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(k) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv 2x - y = 2.$$

(l) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv 2x + 3y + 4z = 2, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & + & t, & & \\ y & = & 4 & - & 2t & - & 4s, \\ z & = & -3 & + & t & + & 3s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(m) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, kde

$$W_1 \equiv \begin{array}{ccccccccc} -x & + & 5y & + & z & - & 4u & = & 1, \\ x & + & y & + & z & - & 2u & = & 2, \end{array} \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

(n) Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

$$W_1 = [\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}]_\lambda, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & + & t & - & s \\ y & = & 1 & + & t & - & s \\ z & = & 1 & + & t & - & s \\ u & = & 1 & + & t & - & s \end{array},$$

$$W_3 \equiv \begin{array}{cccccc} x & - & y & & & = & 1 \\ x & & & - & z & = & 2 \end{array}$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_3$.

(o) Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & + & t & - & 2s \\ y & = & 1 & + & t & - & s \\ z & = & 1 & + & t & - & s \\ u & = & 1 & + & t & - & s \end{array}$,

$$W_3 \equiv \begin{array}{cccccc} x & - & y & & & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \end{array}$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

(p) Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v prostoru $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = [\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccccc} x & = & 1 & + & t & + & s & + & r \\ y & = & 0 & - & t & & & & \\ z & = & 0 & + & t & + & s & & \\ u & = & 0 & - & t & + & s & + & r \end{array}.$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte jejich vzájemnou polohu a průnik.

(q) Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$. Nechť W_1 je nejmenší lineární varieta, která obsahuje vektory $\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\8\\4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\\4\\3\end{pmatrix}$ a nechť $W_2 \equiv \begin{array}{ccccccccc} & - & 2y & + & z & - & u & = & 1 \\ x & + & y & & & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & - & u & = & 1 \end{array}$.

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu a průnik W_1 a W_2.

(r) Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v prostoru $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = [\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 2 & + & t & + & s \\ y & = & & - & t & & \\ z & = & & & t & & \\ u & = & & & & & s \end{array}.$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte jejich vzájemnou polohu a průnik.

(s) Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & + & t & - & 2s \\ y & = & 1 & + & t & - & s \\ z & = & 1 & + & t & - & s \\ u & = & 1 & + & t & - & s \end{array}$.

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2$.