Zkoušková písemka LAP 28.1.2014 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$.

$$W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi_1(\vec{x}) = 0 \wedge \varphi_2(\vec{x}) = 1\},$$

kde ${}^{\mathcal{E}_4}\varphi_1^{\mathcal{Y}} = (1\ 1\ 1\ 1)$ a $(\varphi_2)_{\mathcal{E}_4^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{E}_4$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{Y} = ((2))$ je báze $\mathbb{R}$.

$$W_2 = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\alpha .$$

Určete vzájemnou polohu W_1 a W_2 a najděte neparametrické rovnice $W_1 \cap W_2$ ve standardní bázi a také v bázi $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ zadané pomocí matice v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$. Najděte $A^{-1}(M)$, je-li

$$M = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\alpha .$$

Výsledek zapište opět pomocí afinního obalu, je-li to možné.

3. Nechť jsou dány podprostory $P, Q \subset\subset \mathcal{P}_4$.

$$P = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid (\forall t \in \langle 0, 1 \rangle)\, (x(t) = x(1-t))\},$$

$$Q = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(1) = 0 \wedge x(2) - x(0) = 0\}.$$

Existuje projektor A_P na P podle Q? Pokud ano, najděte všechna řešení rovnice

$$(A_P + D)x = -e_1 + 2e_2,$$

kde D je operátor derivování, $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4)$, a (e_1, e_2, e_3, e_4) je standardní báze $\mathcal{P}_4$.