Zkoušková písemka LAP 11.2.2014 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Nechť jsou dány podprostory $P, Q \subset\subset \mathcal{P}_4$.
$$P = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid (\forall t \in \langle 1, 2\rangle)\,(x(t) = x(1-t))\},$$
$$Q = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(1) = 0 \wedge x(2) - x(0) = 0\}.$$
Existuje projektor A_P na P podle Q? Pokud ano, najděte všechna řešení rovnice
$$(A_P + D)x = -e_1 + 2e_2,$$
kde D je operátor derivování, $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4)$, a (e_1, e_2, e_3, e_4) je standardní báze $\mathcal{P}_4$.

2. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$.
$$W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \bigm| \varphi_1(\vec{x}) = 0 \wedge \varphi_2(\vec{x}) = 1\},$$
kde ${}^{\mathcal{E}_4}\varphi_1^{\mathcal{Y}} = (1\ 1\ 1\ 1)$ a $(\varphi_2)_{\mathcal{E}_4^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{E}_4$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{Y} = ((3))$ je báze $\mathbb{R}$.
$$W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\alpha.$$
Určete vzájemnou polohu W_1 a W_2 a najděte parametrické i neparametrické rovnice $W_1 \cap W_2$ ve standardní bázi.

3. Nechť V je množina kladných reálných čísel a těleso $T = \mathbb{R}$. Nechť jsou definovány pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$, tj. $\vec{x} = x > 0$, $\vec{y} = y > 0$, a každé $\alpha \in T$ operace:
$$\vec{x} \oplus \vec{y} = xy, \quad \alpha \odot \vec{x} = x^\alpha.$$
   (a) Dokažte, že $(V, T, \oplus, \odot)$ tvoří vektorový prostor.
   (b) Najděte bázi V.
   (c) Určete souřadnice vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V$ ve Vámi nalezené bázi, je-li $\vec{x} = 3$ a $\vec{y} = 1$.