Zkoušková písemka LAP 7.2.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně i numericky.

1. Nechť $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)$ je operátor derivování a $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)$ je operátor integrování. Najděte
$$(D - S)^{-1}([e_1, e_3]_\lambda),$$
kde $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ je standardní báze $\mathcal{P}_5$.

2. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^3$,
$$P = [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda \quad \text{a} \quad Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{x}) = 0 \wedge \vec{e}_2^{\#}(\vec{x}) = \vec{e}_3^{\#}(\vec{x})\},$$
kde $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$. Nechť dále $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ je zadané maticí v bázích $\mathcal{X}$
$${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
Najděte všechna řešení následujících rovnic v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$:
   (a) $(A_P B)\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$,
   (b) $(B A_P)\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$,

   kde A_P je projektor na P podle Q.

3. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$. Jsou dány lineární variety $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$.
$$W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 1, \text{ kde } (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}\}$$
a W_2 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dále nechť
$$K = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}]_\kappa.$$
V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte $K \cap W_1 \cap W_2$. Zapište výsledek jako konvexní obal v případech, kdy je to možné.